INSTITUZIONI DI ARITMETICA PRATICA DEL REVERENDISS. PADRE ABATE D...

Guido Grandi



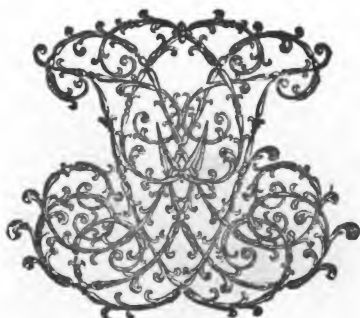
INSTITUZIONI
DI ARITMETICA PRATICA

DEL REVERENDISS. PADRE ABATE

D. GUIDO GRANDI

CAMALDOLESE

PROFESSORE DI MATEMATICA
NELL' UNIVERSITA' DI PISA.



IN FIRENZE NELLA STAMPERIA DI S. A. R.

Per Gio: Gaetano Tartini, e Santi Franchi

CON LICENZA DE' SUPERIORI MDCCXXXX.



INSTITUZIONI
DI
ARITMETICA PRATICA

CAPITOLO PRIMO.

Del modo di numerare, e di rilevare qualunque numero, e come si descrivano.

L modo comunemente tra noi praticato di numerare, procede per la proporzione decupla; di manierachè giunti dall'unità al numero decimo, si replicano altre unità sopra alla decina, che diventa il numero vigesimo; e soggiungendo poscia altre unità, ne proviene il numero trentesimo; e così di mano in mano, come prescrive l'uso ordinario, si accresce altre dieci unità, e si viene al numero quadragesimo, e così pure al cinquantesimo, indi al sessagesimo, poscia al settantesimo, e quindi all'ottantesimo, e susseguentemente al novantesimo, e con l'altra decina di unità si giunge al centesimo, che ha dieci volte compresa la decina. Poscia questi centesimi replicati pure dieci volte, fanno il millesimo, e questo millesimo altre mille volte accresciuto fa il millione, *ec.*

Quindi fu instituito, che nel rappresentare i medesimi numeri si adoperassero questi dieci caratteri, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. de' quali i primi nove significano altrettante unità raccolte per ordine, e l'ultimo, cioè la cifra, che per se sola

nulla significherebbe, serve però di riempimento, per denotare in qual posto siano collocate le note significative, che la precedono, augumentandone il valore secondo la progressione decupla; onde scrivendo 10 si viene a denotare una decina, e scrivendo 20 si esprimono due decine, che diconsi venti; e così 30 ne importa tre decine, che sono il trenta, e così di mano in mano le altre decine similmente si esprimono; ma quando si arriva a dieci decine, si descrive 100. che è il cento; ed il doppio di ciò, che saranno venti decine, si espone 200 il che è dugento; e così 300 è il trecento; e di mano in mano con altre note procedesi ad altri centesimi, li quali se sono dieci, si descrive 1000, che importa cento decine, cioè il mille; e 2000 importa dugento decine, che sono due mila; e così l' altre.

Dal che ne avviene, che nelle note numeriche bisogna avvertire il posto in cui sono collocate; imperocchè l' ultima nota, che riesce dirimpetto alla destra di chi legge, significa le semplici unità, e l' antecedente verso la sinistra ne rassegna le decine delle unità, e quella che precede questa ne importa le centinaia, e l' altra nota antecedente le migliaia; e così di mano in mano qualunque figura anteriore moltiplica per dieci il significato, che averebbe avuto nel posto susseguente, come si apprenderà nella seguente tavola, in cui ho esposto un numero a capriccio di ventotto note, le quali dalla destra alla sinistra si possono dividere con alcune virgole di tre in tre, per disegnare le centinaia, le decine, e le unità; ed ancora al di sopra vi ho poste alcune stellette,

lette, che le diſtinguono di ſei in ſei, li quali diconſi i millioni, e i millioni de' millioni (che poſſono dirſi *Billioni*) e li millioni di millioni di millioni (che ſi chiamano ancora *Trillioni*) ed ancora li millioni de' millioni, de' millioni, de' millioni (che poſſono dirſi *Quadrillioni*) ed accennaſi appreſſo a ciaſcuna nota la denominazione, che gli conviene nel poſto, in cui ſi trova.

2 854 021 354 791 256 402 314 574 286

Migliaia di Quadrillioni.
Centinaia di Quadrillioni
Decine di Quadrillioni
Quadrillioni
Centinaia di Migliaia di Trillioni
Decine di Migliaia di Trillioni
Migliaia di Trillioni
Centinaia di Trillioni
Decine di Trillioni
Trillioni
Centinaia di Migliaia di Billioni
Decine di Migliaia di Billioni
Migliaia di Billioni
Centinaia di Billioni
Decine di Billioni
Millioni di Millioni (o dicanſi Billioni)
Centinaia di Migliaia di Millioni
Decine di Migliaia di Millioni
Migliaia di Millioni
Centinaia di Millioni
Decine di Millioni
Millioni
Centinaia di Milleſimi
Decine di Milleſimi
Milleſimi
Centeſimi
Decine
Unità

E così ſe foſſe più lungo il numero, vi ſarebbero ancora Quintillioni, Seſtillioni, Settillioni, Ottillioni, Novillioni *ec.* creſcendoſi ciaſcuno da ogni ſei note.

Il ſuddetto numero dovrebbe però così eſprimerſi eſattamente: *due mila ottocento cinquantaquattro Quadrillioni, ventun mila trecentocinquantaquattro Trillioni, ſettecento novantun mila dugento cinquantaſei Billioni, quattrocento due mila*

trecento quattordici Millioni, cinquecento settantaquattro mila, e dugento ottanta sei; e qualunque altro numero similmente potrassi esprimere; per esempio 4 8 9 *, 6 7 3, 5 1 0 *, 2 4 3, 8 0 5 significa *quattrocento ottantanove Billioni, seicento settantatre mila e cinquecentodieci millioni, dugento quarantatre mila ottocentocinque*; e così qualunque altro facilmente dovrassi intendere, secondo che nell' antecedente Tavola si è accennato il valore delle note poste sopra, o sotto.

Oltre però a queste note Aritmetiche, quà solamente addotte da Gereberto Monaco Floriacense, ottimo Filosofo, e Matematico, che poi fu Arcivescovo Remense in Francia, poscia in Ravenna di Romagna, fattovi elevare dall' Imperatore Ottone III. di cui era stato Maestro, ed indi fu fatto poi Papa nell' anno 999, cioè novecento novantanove, col nome di Silvestro Secondo, che poi morì nel 1003, cioè nell' anno terzo dopo il millesimo, vi sono le note Romane, che prima solamente si adoperavano, ed ora in molti luoghi pure si ammettono le quali sono queste lettere I, V, X, L, C, D, M. La prima espone l' unità, e duplicandola II. fa due, triplicandola fa III. cioè tre. La seconda esprime il cinque, e postogli avanti l' unità, cioè IV. assegna quattro, ma se gli si aggiunge dopo l' unità VI espone sei, se due unità VII. fa sette, e se tre unità VIII. fa otto. La terza lettera esprime dieci, e con l' unità precedente IX. espone nove, con le unità poi aggiuntevi XI. XII. XIII. rappresenta undici, dodici, e tredici, ed aggiuntovi la nota del quattro, e del cinque, e dell' altre susseguen-

guenti, cioè XIV. XV. XVI. XVII. XVIII. XIX. espone quattordici, quindici, sedici, diecisette, diciotto, diciannove; e duplicando, o triplicando l'istessa, cioe XX. XXX. rappresenta il venti ed il trenta, alle quali addotte le note degli altri primi numeri, come XXII. XXIV. XXXV. *ec.* si espongono ventidue, ventiquattro, trentacinque, e così gli altri. La quarta lettera significa, il cinquanta, e con la terza avanti, cioè XL. fa il quaranta; e con esse dopo, come LX. LXX. LXXX. si esprime il sessanta, il settanta, e l'ottanta; alle quali aggiunte le altre note de' primi numeri, come LXV. LXXII. LXXXIV. LXXXIX. ed altre simili, si ha il sessantacinque, il settantadue, l'ottantaquattro, l'ottantanove *ec.*

La quinta lettera C. significa cento, e postavi avanti la terza, cioè XC. espone novanta, onde XCIII. dice novantatre, XCIX. importa novantanove, ed aggiunte le altre note al C, come CV. CX. CXXIV. *ec.* esprimesi cento cinque, cento dieci; cento ventiquattro *ec.* e duplicando l'istessa C, o triplicandola, cioè CC. CCC. rappresenta il dugento ed il trecento, alle quali parimente si aggiungono l'altre note, come CCXXV. CCCLIII. CCCLXIX. espongono dugento venticinque, trecento cinquantatre, trecento sessantanove *ec.*

La sesta lettera D. esprime cinquecento, onde postavi avanti la C, cioè CD. rappresenta il quattrocento, ed aggiuntavi dopo, come DC. DCC. DCCC, si espone il seicento, il settecento, e l'ottocento; ed aggiunte a queste medesime altre note, DCXII. DCCLIV. DCCCXLVII. similmente espongono il seicento dodici, il settecento

cinquantaquattro, l' ottocento quarantasette *ec.* Finalmente la settima lettera M rappresenta il mille, e postovi avanti il C, cioè CM. propone il novecento, e postagli dopo MC. MCC. MCCC. MCD. MD. MDC MDCC. *ec.* significasi il mille cento, mille dugento, mille trecento, mille quattro cento, mille cinque cento, mille sei cento, mille sette cento *ec.* ed aggiuntevi ancora altre note, come MDCXIV. MDCCCLXV *ec.* si averà il mille seicento quattordici, il mille ottocento sessantacinque *ec.* e replicando l' istessa M, cioè MM. ovvero MMM. *ec.* si espone due mila, tre mila *ec.*

Ma noi parleremo di quell' altre note avanti proposte, che più facilmente s' intendono, con minor calcolo, rapportando maggiori numeri; nè ritrovandosi come con le note Romane si esprimessero i Millioni, e Billioni, e Trillioni *ec.*

CAPITOLO II.

Del sommare insieme più numeri della medesima specie.

SI scrivano per ordine i numeri da aggiungersi insieme, facendo corrispondere le unità alle unità, le decine alle decine, le centinaia alle centinaia, e così di mano in mano: poscia tirata sotto una linea, si compongano insieme le unità da aggiungersi, le quali se sono più di nove, come che tale somma dovrebbe con due, o più note esprimersi, solamente l' ultima ci si deve sottoscrivere, riserbandosi l' altre da aggiungersi al luogo delle decine; e queste parimente congiungendosi insieme, del numero che ne risulta, se ne sot-

ſottoſcrive pure l' ultima nota nel luogo delle decine, riſerbando l' altre di aggiungerſi alle centinaia; e così di mano in mano andando verſo la ſiniſtra, fin che non vi ſia altro da aggiungerſi, tutto il reſultante ſi ſcriverà al ſuo luogo, come s' intenderà meglio nel ſeguente eſempio.

A	2345826
B	784250
C	1563724
D	51892
E	4745692

Siano da aggiungerſi inſieme li quattro numeri A, B, C, D, e ſcrivendoli ordinatamente ciaſcuno ſotto l' altro; tiratagli ſotto la linea retta, ſi pongano inſieme le unità 2 e 4, che fa 6, lo zero o non aggiunge nulla, ma la nota ſuperiore 6 con gli altri compone 12, però ſi ſcriva ſotto il 2, e ſi traſporti alla parte delle decine l' unità, che vi era avanti, e preſe le tre note di decina, l' uno che ſi porta, col 9 fa 10, e col 2 diventa 12, col 5 rieſce 17, e col 2 ſi fa 19, però ſotto ſcrivaſi 9; ed alle centinaia ammeſſa l' antecedente unità, con 8 fa 9, col 7 diventa 16, col 2 fa 18, e con l' 8 fa 26, però ſcrivaſi ſotto il 6, ed il 2 ſi traſporti alle migliaia, che con 1 farà 3, con 3 diventerà 6, con 4 rieſce 10, e con 5 ſi fa 15, onde ſi ſcriva pure ſotto il 5, e portata l' unità a' numeri precedenti, con 5 fa 6, con 6 fa 12, con 8 diventa 20, e con 4 ſi fa 24, perciò ſi ſcriva di ſotto il 4, ed agli antecedenti numeri aggiunto il 2, che con 5 fa 7, con 7 fa 14, e con 3 diventa 17, ſcritto ſotto il 7, e traſportata di là l' unità, con 1 e 2 farà 4, da ſcriverſegli ſotto; onde la ſomma di quei numeri A, B, C, D, è uguale a ciò che ci eſprime il numero E, che importa *quattro mil-*

lioni, settecento quarantacinque mila, seicento novantadue. Eccone altri minori esempj.

245	456	7952	82052
1382	3240	345	64721
2748	532	28	8094
4375	4228	8325	154867

Per riprova d' aver bene operato, si suole alle volte rifare l' operazione a rovescio, cioè, siccome prima si cominciò a sommare dalle note inferiori ascendendo alle superiori, così un altra volta può cominciarsi dalle superiori discendendo alle inferiori, per vedere se ne ritorna il medesimo numero nella somma, come prima si era trovato.

Oltre a ciò può farsi la prova del nove in questa maniera. Si mettano insieme le note de' numeri proposti, sommandogli con qualsivoglia ordine, come se fussero semplici unità, e rigettando sempre il nove qualunque volta s' incontri, ritengasi solamente il conto di quello ne avanza; poscia si faccia il simile nella somma, in cui se da i 9, non avanzasse lo stesso numero, sarebbe segno di aver fatto male il calcolo con qualche errore commessovi, ma se si trova il medesimo avanzo di numero, la somma si crederà stare benissimo, se pure non vi si fusse per sorte errato di nove. Così nel primo precedente esempio, rigettando il nove da' numeri A, B, C, D, ne rimane una sola unità, e l' istessa avanza nella somma E, come è chiaro; imperocchè nel numero A, che è 2345826, il 4 e 5 fa 9, il 6 e 3 fa 9, l'8 col 2 fa 10, e con l' altro 2 fa 12, che sono

3 ol-

3 oltre il 9; nel numero B, che è 784250, riesce 8, essendo gli altri 7 e 2 uguali a 9, ed ancora 4 e 5 uguale a 9; nel numero C, che è 1563724, rimane solo 1, essendo gli altri 5 e 4 uguali a 9, 6 e 3 uguali a 9, 7 e 2 uguali a 9; nel numero D, che è 51892 levato il 9, ed il 18, rimane 5 e 2, che fanno 7; dunque del primo numero essendo rimasto il 3, nel secondo 8, che con quello fa 11, nel terzo l' unità, che con quelli fa 12, e nel quarto 7, che con li precedenti fa 19, è chiaro, che levati i due 9 rimane 1, ed ancora nella somma E, che è 4745692, levato il 9, il 7 e 2 il che pure è 9, il 4 e 5 che ancora fa 9, rimane il 6 con l' altro 4 che fa 10, onde ci rimane pure l' unità oltre i novesimi.

L' istesso si mostrerà negl' altri esempj, come ancora in quest' altro calcolo, in cui ne' due numeri precedenti levato il 3 e 6 che fa 9, rimane 4, e con 8 farà 12, cioè 3 sopra il 9, e col 2 farà 5; ed ancora nella sua somma 6 e 6 fa 12, che sono 3 sopra il 9, e questi 3 con quelle due unità fa pur 5, onde sarà ben ridotta da que' due numeri cotesta somma; e così pure si farà in altri casi, e molto piacerà questa specie del 9, di cui se ne mostreranno quì altre proprietà molto favorevoli, che si vedranno in altri Capitoli.

346
820
1166

CAPITOLO III.

Del sommare i numeri di specie diversa.

ALle volte si devono aggiungere numeri appartenenti a varie specie di cose, come sarebb-

rebbero lire, ſoldi, e danari; o pure giorni, ore, e minuti, o ancora di una circolare periferia i gradi, i minuti primi, i minuti ſecondi, i minuti terzi *ec.* e ſimilmente in altri caſi compoſti di varie parti. Allora conviene diſporre i numeri in maniera, che ſi corriſpondano le ſpecie ſimili una ſotto l'altra, e cominciando a ſommare quelli di minor valore, ſi vede ſe nella ſomma ſi contiene la ſpecie ſuperiore, la quale ſi ritiene, ſottoſcrivendo ſolamente l'avanzo, e riportando ciò che ſi è ritenuto, per congiungerlo a' numeri della ſpecie precedente, li quali altresì poſti inſieme, ſe ne comprende qualche numero dell' altra ſpecie ſuperiore da riportarſi ad eſſa, ſcrivendone ſotto queſta il reſiduo; e così pure ſi fa nell' altre ſpecie ſe vi ſono antecedentemente, compreſo poi il reſto nella maggiore ſpecie di tutte, come ſi ſpiegherà meglio ne' ſeguenti eſempj.

	ſiano Lire.	*Soldi.*	*Danari.*
	8.	10.	4
	2.	6.	8
	4.	10.	4
ſomma lire	15.	7.	4

Cominciando dall' infima ſpecie, che ſono i danari, ſi dice 4 e 8 fanno 12, li quali dodici danari fanno un ſoldo, e rimane 4 da ſottoſcriverſi; indi aggiunto quel ſoldo alli 6 fanno 7, e li 10 duplicati ne fanno 20, che appartengono ad una lira, però gli ſi ſottoſcrive 7, e computata queſta lira con le altre 4, 2, e 8 diventano lire 15 onde la ſomma è lire 15. 7, 4 e ſe vi foſſero

ſtati

ſtati ancora diviſi li ſcudi, che hanno lire 7 l' uno in Toſcana, biſognava dire ſcudi 2, lire 1, ſoldi 7, e danari 4, perchè il primo numero ſarebbe pure ſtato ſcritto in queſt' altra maniera Scudi 1. lire 1. 10. 4 in vece di lire 8. 10. 4

Similmente ſe vi foſſero varj numeri di giorni, d' ore, e di minuti, ſi potranno ſimilmente comprendere nell' iſteſſa maniera.

	Giorni.	*Ore.*	*Minuti.*
	8.	17.	48
	13.	20.	16
	21.	19.	30
	5.	18.	38
ſomma	50.	4.	12

Congiungendo i minuti 38, 30, 16, e 48 ne rieſce 132, in cui 120 importa due volte il ſeſſanta, cioè 2 ore, ciaſcuna delle quali ha ſeſſanta minuti, però ſi ſcriva ſotto il rimanente 12; ed aggiunte ore 2 alle 18, 19, 20, e 17 ne rieſcono 76, in cui 72 importano 3 volte le 24 ore, e però ſottoſcrittovi il rimanente 4, ſi traſportino 3 giorni (ciaſcuno de' quali ha le 24. ore) agli altri 5, 21, 13, e 8, che ne rieſcono giorni 50; e ſe vi ſi doveſſero ancora diſtinguere i meſi di 30 giorni l' uno, ſarebbero un meſe e giorni 20, con 4 ore, e 12 minuti.

Similmente eſſendovi alcuni peſi, libbre, ed once d' olio, o di farina *ec.* ſe ne ricaverà la ſomma in ſimigliante maniera. Per eſempio ſiano,

Peſi

	Pesi.	*Libbre.*	*Once.*
	7.	14.	6
	12.	18.	10
	5.	16.	9
la somma è	26.	0.	1

Computate le once 9, 10, e 6 sono 25, in cui due volte sono le 12, che compongono la libbra, però levate le 24, si scrive sotto solamente 1, e si portano le 2 libbre all' altre 16, 18, e 14, che ne fanno 50, ma 25 libbre facendo un peso, dunque ne riescono 2 pesi senz' altra libbra, onde vi si scrive sotto il zero, e questi 2 pesi composti con 5, 12, e 7 riescono 26.

Dovendosi ancora computare i gradi della curva circolare, con i suoi minuti primi, e secondi: siano

	Gradi.	*Minuti* I.	*Minuti* II
	25.	32.	46
	60.	50.	27
	13.	41.	32
la somma sarà	100.	4.	45

Imperocchè li minuti secondi 32, 27, e 46 sono 105, da cui levato il 60, che è un minuto primo, ne rimane da scriversi sotto 45, e computato quel minuto primo con gli altri 41, 50, e 32 se ne fanno 124, di cui il 120 è due volte 60 minuti primi, che ne importano 2 gradi, onde scrittovi sotto il 4 si computano quelli due gradi con gli altri 13, 60, e 25, che riescono 100.

Chi volesse provare ancora l' esattezza di questi sommati, potrebbero sommarsi li numeri di qua-

qualunque ſpecie con un altro ordine cominciando da' ſuperiori, e diſcendendo agl' inferiori, ſiccome prima abbiamo ciò fatto cominciando dagl' inferiori, ed alzandoſi a' ſuperiori, e vedere ſe ne rieſce l' iſteſſa ſomma. Volendo poi col 9 provare ſe vi ſia lo ſteſſo eccesso ne' numeri da ſommarſi, come è nella loro ſomma, non baſterà far ciò in qualunque numero, come nel capitolo precedente ſi è inſegnato, circa alla ſomma de' numeri della medeſima ſpecie, ma conviene moltiplicare quelli della prima ſpecie, e della ſeconda, come ne comporta la terza.

Per eſempio, ove ſi adduſſero lire, ſoldi, e danari, come che la lira è di 20 ſoldi, ed il ſoldo di danari 12, eſſendo ſopra il 9 quello 2, e queſto 3 (perchè il 20 ſupera il 18 con 2, ed il 12 ſupera il 9 di 3; anzi baſta oſſervare le ſemplici note de' numeri, che moſtrano appunto il loro eccesso ſopra il noveſimo, eſſendo 1 con 2 uguale a 3, perciò tanto il 12, quanto il 21 ſupera il 9 ſolo, o duplicato di 3, e così ancora 42, o 24 ſupera il 9 di 6 *ec.*) perciò moltiplicando il 2 col 3 fa 6, onde li numeri delle lire 4, 2, e 8 eſſendo 14, cioè 5 ſopra il 9, biſogna moltiplicare eſſo 5 nel 6, che fa 30, cioè ſolamente 3 ſopra il 9 (ſuperando 30 il 27 di 3) e li numeri de' ſoldi 10, 6, e 10, che ſuperano il 9 di 8, deve moltiplicarſi in 3, che farebbe 24, cioè 6 ſopra il 9; indi ne' danari 4, 8, e 4 fanno 16, cioè 7 ſopra il 9, onde avendoſi dalle lire l' eccesso del 9 uguale a 3, da i ſoldi uguale a 6 (che con 3 il 6 fa 9) rimane il ſolo eccesso 7. Ma ancora nel ſommato le lire 15 fanno 6, che moltiplicate per 6 fareb-

rebbero 36 uguale al quadruplo 9, e ne' ſoldi il 7 moltiplicato per 3 fa 21, che pure è 3, che ſommato col numero de' danari 4, fa pur la ſomma di 7, come ſi trovò ne' numeri da ſommarſi.

Quanto a' giorni, ore, e minuti, eſſendo il giorno di 24 ore, e l'ora di 60 minuti, eſſendo tanto queſto, che quello 6 ſopra il 9, e moltiplicato il 6 per 6 facendo 36, che contiene quattro volte appunto il 9; perciò non occorre cercare il 9 nel giorno, ma baſta oſſervarlo nell'ore, ed il ſuo eccesso moltiplicato per 6 ſi uniſca a' numeri de' minuti, come nell' eſempio addotto. Dall'ore 18, 19, 20, 17 ne riſultano 2 oltre il 9, e moltiplicato 2 per 6 diventa 12, che è 3 ſopra il 9; indi da minuti 38, 30, 16, e 48 levato il 9 rimangono 6, ed aggiuntovi il 3 diventa pur 9, onde niuno eccesso vi rimane; Così ancora nel ſommato le ore 4 moltiplicate per 6 fanno 24, che ſono pure 6 ſopra il 9, ed il 12 de' minuti, eſſendo 3 ſopra 9, con l' altro 6 rimane pur 9 ſenza veruno eccesso.

Circa i peſi, libbre, ed once, eſſendo il peſo di 25 libbre, che è un 7 ſopra il 9, e la libbra di 12 once, che importano 3 oltre il 9, ſarà pure 7 via 3 uguale a 21, che ancora è 3 ſopra il 9. perciò gli eccessi e del peſo, e delle libbre ſopra li 9, ſi moltiplicheranno per 3, indi ſi aggiungeranno a' numeri dell'once, come nell' addotto eſempio. I peſi 5, 12, e 7 importano 6 oltre il 9, e moltiplicato 6 per 3 fa 18, che è appunto 9 ſenza veruno eccesso; le libbre poi 16, 18, e 14 ne importano 3 ſopra il 9, che moltiplicato per 3 fa parimente 9; ſicchè baſta oſſervare l' once 9, 10, e 6, che importano 7 oltre il 9. Ma nel ſommato

di

di esse i pesi 26 importano 8 sopra il 9, che moltiplicato per 3 fa 24, cioè 6 eccesso di 9, che con l'oncia 1 importa ancor essa il 7, e però è ben disposta.

Quanto a' gradi, e minuti primi, e minuti secondi, essendo ogni grado di 60 minuti primi, e qualunque minuto primo di 60 minuti secondi, perciò il grado non deve compararsi co' 9, perchè il suo eccesso anderebbe moltiplicato in 6 via 6, che fa 36 uguale alli 9, ma solamente l'eccesso de' minuti primi 41, 50, e 32, che è 6 sopra il 9, moltiplicatosi pure per 6 fa il 36 uguale alli 9; ma ne' minuti secondi 32, 27, e 46 rimane pure il 6 sopra il 9. Ed ancora nel sommato de' minuti primi 4 moltiplicati per 6 fanno 24, che pure sono 6 sopra il 9, e ne' minuti secondi 45 non vi è altro eccesso sopra il 9; onde è il medesimo eccesso ne' numeri da sommarsi, e nel sommato di essi Onde nessuna delle addotte somme si trova mal fatta.

CAPITOLO IV.

Del modo di sottrarre i numeri della medesima specie, o di specie diverse; e di alcune proprietà de' numeri verso il 9.

SI scriva il numero maggiore, da cui si deve fare la sottrazione sopra al minore, che deve sottrarsi; di manierachè, corrispondendo le unità alle unità, le decine alle decine, li centesimi alli centesimi, e così di mano in mano gli altri, cominciando poscia dall' ultimo, si sottraggano quelle del numero inferiore da quelle del superiore, sotto-

scri-

ſcrivendo l' avanzo ne' luoghi corriſpondenti; ma perchè può darſi il caſo, che qualche numero inferiore ſi trovi maggiore di quello del ſuperiore, da cui non potrebbe ſottrarſi, conviene allora preſtare una decina antecedente al numero ſuperiore, acciocchè baſti all' effetto deſiderato, e fatta la ſottrazione dell' inferiore, ſi ſcriverà l' avanzo al di ſotto. Quindi la precedente nota del numero ſuperiore rimarrà diminuita dell' unità aggiunta alla ſua ſeguente nota, come ſi vedrà nell' eſempio ſeguente.

A	9	2	3	4	2
B	5	1	8	3	1
C	4	0	5	1	1

Si debba ſottrarre il numero B dal maggiore A. Eſſendo ſcritti per ordine queſto ſopra quello, ſi levi l' ultima nota 1 dalla ſuperiore 2, e reſterà pure 1 da ſcriverſi ſotto al ſuo luogo; indi ſottratto il 3 dal 4 reſta pure un altra unità da ſoſcrivervi; perchè poi 8 non può levarſi da 3, gli ſi aggiunge una decina, e ſi fa 13, da cui tolto 8 rimane da ſottoſcriverſi 5; poſcia eſſendo levata l' unità dal ſuperiore numero 2, rimane uno, da cui volendo cavare l' altro inferior numero 1 nulla ne rimane, perciò ſottoſcriveſi il zero; indi detratto 5 da 9 rimane da ſottoſcriverſi 4, e così è compiuta la ſottrazione C.

D	3	4	2	5
E		8	3	7
F	2	5	8	8

Un altro eſempio ſia queſto, in cui debbaſi dal numero D ritrarne il numero E. In queſto non potendo ſottrarſi, ne 7 da 5, ne 3 da 2, ne 8 da 4, biſogna fare in queſt' altro modo; 7 da 15 ne reſta da ſottoſcriverſi 8, e perchè il 2 rimane 1, aggiuntavi pure la decina ſi dirà 11, da cui tolto il 3, rimane pure 8 da ſottoſcriverſi, ed il 4 dimi-

nui-

minuito ancor esso dell' unità rimane 3, onde finalmente dovrà levarsi l' 8 dal 33, che rimarrà 25 da sottoscriversi, per la sottrazione F ivi posta; e così in altre maniere, che si debbano sottrarre alcuni numeri da altri maggiori, potrà similmente farsi con le addotte condizioni da osservarsi.

Per ripruova di aver bene operato, basta sommare il ridotto numero C col numero sottratto B, la qual somma se restituisce il maggior numero A, da cui è fatta la sottrazione, sarà fatta benissimo. Ma se vi riuscisse qualche divario, sarà segno di aver errato nell' operazione; similmente nell' altro esempio si provi di sommare il ridotto numero F col sottratto E, onde si vegga se tale somma è l' istessa, che il maggior numero D, onde fu fatta la sottrazione, il che se avviene, sarà la sottrazione ben fatta; ma se vi fosse diversità, non sarebbe sottratto bene il numero minore E, dal maggiore D.

Si potrebbe ancora ciò provare con ridurre il 9 dalli due numeri B, e C, e vedere se ciò, che restasse in questi due fosse il medesimo, che quello rimarrebbe nel maggior numero A, detratti pure quindi li 9. E similmente nell' altro esempio si tolga il numero 9 dalli due numeri E, ed F, indi si paragoni tal' eccesso con quello del maggior numero D, levatogli il 9, che se sarà il medesimo eccesso in quelli, ed in questo, sarà ben fatta la sottrazione; e se tale non fosse, sarebbe malamente sottratto il minor numero dal maggiore. Però nel primo esempio, se si leva il 9 da' numeri B, e C, rimane 2, ed ancora dal numero A il 2 rimane; e nel secondo esempio tolto il 9 da E,

B ed

ed F, resta 5, e dal numero D, rimane il medesimo, onde può credersi l'operazione ben fatta in ambidue gli esempj.

Volendo poi sottrarre i numeri di specie diversa, per esempio il tempo B dal tempo A, ne risulterà C nel modo seguente.

	Giorni.	Ore.	Minuti.
A	14.	6.	15
B	7.	22.	52
C	6.	7.	23

Non potendosi sottrarre li minuti 52 da' 15, si levi un ora dalle ore 6, la quale importando 60 minuti, aggiunti a' 15 ne diventeranno 75, da' cui tolti li 52, rimarrà da sottoscriversi 23; le ore di A rimarranno 5, e non potendoci cavare le ore 22 di B, si aggiungerà a quell'ore 5 un giorno, cioè ore 24, che riusciranno 29, d'onde cavate le 22, rimarranno 7 da scriverci sotto; poscia li giorni 7 levati da giorni 13 (avendone levato uno dalli 14) ci lasciano giorni 6, però questo ancora si sottoscrive nella sottrazione C.

In quest' altra sottrazione di lire, soldi, e danari, quando il numero inferiore E, da sottrarsi dal maggiore D, al di sopra, ha li danari, ed i soldi maggiori di quelli, che sono nell' altro D, bisogna alli danari del numero superiore aggiungervi un soldo, cioè altri 12 danari, ed a' soldi aggiungervi una lira, cioè soldi 20; onde si dovrà sottrarre danari 8 da 16, e levato quest' 8, rimane parimente 8, che sotto si scrive; e li 3 soldi rimanendo 2, con gli altri 20 sono 22, da' quali sottratto il 6, rimangono

	Lire.	Soldi.	Danari
D	21.	3.	4
E	15.	6.	8
F	5.	16.	8

no 16 da ſottoſcriverſi ad eſſi; indi il numero di lire 21 rimane 20, da cui ſottratte le 15 lire, rimangono da ſoſcriverſi 5 nella ſottrazione F: e per provare, che ſia ben fatto tale reſiduo, baſterebbe ſommare queſto F col detratto E, e vedere ſe rieſce lo ſteſſo col numero maggiore D, che ſe ſaranno uguali, ſarà ben fatta la ſottrazione; ma ſe vi fuſſe qualche diverſità, è certo, che non ben fatta ſarebbe tale ſottrazione.

Parimente ſi potrebbe levare li 9 tra B, e C nell' antecedente eſempio, e vedere ſe il rimanente uguagliaſſe l'eccesſo de' 9 nel numero A; e nell' altro conſeguente parimente prendere l' eccesſo di 9 da E, ed F, ed oſſervare ſe l' iſteſſo foſſe nel D; detrattine i loro 9 in quella maniera, che nel precedente Capitolo ſi è avvertito doverſi fare ne' numeri di ſpecie diverſa; cioè nel primo eſempio baſterà da B, e C prendere l' eccesſo di 9 ſolamente tra le ore 22, e le 7, il quale eccesſo è 2 da moltiplicarſi per 6, che diventa 12, cioè 3 ſopra il 9, e da' minuti 52 e 23 l'eccesſo di 9 è 3, onde tutto l' eccesſo rimane 6, ed ancora nell' A le ore 6 moltiplicate per 6 fanno 36, ove non è veruno eccesſo di 9, e poſcia ne' minuti 15 parimente rimane 6. onde è ben fatta quella ſottrazione; e nel ſecondo eſempio paragonando di E, ed F le lire 15, e le 5, che fanno 20, cioè l'eccesſo 2 ſopra il 9, e moltiplicandolo per 6 diventa 12, il di cui eccesſo ſopra 9 è 3; poſcia i ſoldi 6, e 16, che ſono 22, hanno l'eccesſo 4 ſopra il 9, e moltiplicato per 3 fa 12, che pure ha l' eccesſo 3, e con l' altro 3 delle lire, fa 6; indi ne' danari 8 ed 8, che ſono 16, vi è l' eccesſo 7 ſopra'l

9, onde con l' altro 6 diventa 13, che importa l' eccesso 4; e parimente nel D il numero delle lire 21, ha l'eccesso di 3 sopra il 9, che moltiplicato per 6 diventa 18, senza verun eccesso di 9, e li soldi 3 moltiplicati in 3 fanno pure 9; onde ne' danari resterà il medesimo 4, sicchè pure è ben fatta questa sottrazione.

Giacchè si è molto discorso di questi eccessi del 9, ed ancora dopo se ne dovrà parlare, stimo bene, che si avvertano alcune proprietà numeriche, competenti ad esso nove: Primieramente l' eccesso di qualunque numero sopra il novesimo, si vede nell' istesse sue note, come 25 è sopra li due nove con l' eccesso di 7, il che si ha dal 2 e dal 5; così pure il 43 eccede li quattro nove di 7, perchè 4 e 3 fanno 7; similmente anche in un grandissimo numero 2142586 3 combinando le note, 2, ed 1, e 4, e 2 fanno 9, poi 5 e 8 fanno 13, che sono 4, li 6, e li 3 fanno pure il 9, dunque l' eccesso di quel numero sopra il novesimo sarà solamente 4; e l' istesso si trova, paragonando le note, che fanno il 9, e prendendo solamente l' altre; così poteva vedersi, che 6 e 3 fa 9, 8 e 1 fa 9, 5, e 4 fa 9, e restano 2, e 2, che fanno 4, onde questo è il suo eccesso sopra il novesimo; e se sarà un numero con le stesse note diversamente poste, come 54213628, o pure 23854162 *ec.* hanno lo stesso eccesso 4.

Secondariamente, se le note del numero poste insieme fanno solamente il 9, e non altro eccesso, quel numero sarà puramente di alquanti nove composto; così perchè 7 e 2 fanno 9, ed ancora 5 e 4, ed altresì 3 e 6 *ec.* perciò i numeri 72, 27,

54,

54, 45, 36, e 63 sono novesimi, ed ancora in numeri maggiori 5724, 6831054, *ec.* vi è il 9 più volte, perchè 7 e 2, con 5 e 4, e 6 con 3, ed 8 con 1, e 5 con 4 importano il 9.

In terzo luogo si può osservare, quante volte sia il 9 in uno di tali numeri novesimi; il 9 è uno, perchè manca dal dieci una unità; il 18 è due 9, perchè manca 2 dal 20; il 27 è tre 9, mancando per 3 dal 30; e così andando avanti fino al 90, che è decimo nono; ed il 99 è undecimo nono; il 108 è il duodecimo, perchè manca per 2 dal 110; il 117 è pure terzodecimo, mancando per 3 dalla seguente decima 120; e così gli altri sussseguenti, di maniera che qualunque numero novenario, aggiuntovi il numero, che ha del 9, farà sempre qualche decimo, essendo 9 con 1 uguale a 10, e 18 con 2 uguale a 20, e 27 con 3 uguale a 30, ed ancora il 99 con l' 11 uguale a 110, ed il 108 con il 12 uguale a 120, e così il 207 col 23 è uguale a 230, il 738 con l' 82, fa 820 *ec.*

In quarto luogo si avverta, che due diversi numeri, se sono composti delle medesime note variamente disposte, la loro differenza sarà sempre di qualche novenario. Per esempio 13 da 31 differisce per 18, che sono due 9; così 47 da 74 differisce per 27, che sono tre 9; parimente 17538 da 53781 differirà per 36243, che ha 4027 volte il 9; e similmente 341 da 413 differisce per 72, che sono 8 volte il 9, e 2157 da 5271 differisce per 3114, che sono 346 volte il 9. E così sempre la differenza de' numeri composti delle stesse note alternate importa alquanti 9.

Anzi altri numeri, non con le medesime note composti, ma nè pure con l'istessa moltitudine di esse, purchè i loro Caratteri insieme composti, ne mostrasero lo stesso numero, questi ancora averanno la loro differenza composta di 9: Per esempio 52, e 43, e 16, e 124, e 322. *ec.* ne importano 7, e la differenza di 52 da 43 è appunto il 9, e del medesimo 52. da 16, è il 36, cioè quattro novesimi, da 124 manca per 72, che sono otto novesimi, e da 322 per 270, che sono 30 novesimi. Parimente paragonando il 32 col 104, col 212, le cui note importano il 5, la differenza del primo dal secondo è 72, cioè 8 volte il 9; del medesimo primo dal terzo, la differenza è 180, cioè 20 volte il 9; ed altresì la differenza del secondo dal terzo sarà il 108, che importa 12 volte il 9, e così negli altri. Così la differenza di 6 da 24, o da 42, o da 321 si troverà essere alquante volte il 9, cioè tra il primo, e il secondo la differenza è 18, ed ancora tra il secondo, e il terzo vi è la stessa differenza col 9 due volte, e tra il primo, ed il terzo la differenza è 36, che ha 4 volte il 9, e la differenza tra il terzo, e il quarto è 279, che importa il 9 per 31 volta, *ec.*

Finalmente, se sono diversi gli eccessi del 9 in un numero, e in un altro, quando il maggior numero abbia maggiore eccesso, ed il minore un altro eccesso minore di quello, la differenza di tali eccessi sarà la medesima, con cui la differenza de' numeri proposti eccede il 9. Per esempio siano questi due numeri 347, 228; l' eccesso del 9 nel primo, che è maggiore, sarà 5, perchè 7, e 4 fa

fa 11, e 3 con esso fa 14, in cui 4 e 1 fa il 5, nel secondo, che è minore l' eccesso del 9 sarà 3 (perchè 2 e 2 fa 4, e con 8 il 12, in cui 1 e 2 fa 3) minore dell' altro eccesso, la differenza de' quali eccessi è il 2; così ancora la differenza del maggior numero dal minore, che sarebbe 119 (perchè 119 con il 228 fa il 347) ha pure il 2 eccesso sopra il 9. Ma se il maggior numero ha un eccesso di 9 minore dell' eccesso, che averà il minor numero; la differenza di questi eccessi si levi dal 9, ed il resto sarà l' eccesso di 9, che ha la differenza di un numero dall' altro Per esempio siano i numeri 21, e 17 l' eccesso del primo, e 3, del secondo è 8, la differenza de' quali è 5, e levato il 5 dal 9, resta 4, dunque la differenza di 21 da 17, è per appunto il 4, e così negli altri.

CAPITOLO V.

Del moltiplicare i numeri della medesima specie.

Volendo moltiplicare un numero con un altro numero, bisogna che si moltiplichi qualunque nota dell' uno con ciascuna nota dell' altro, e disporre le note risultanti nel numero prodotto a' suoi luoghi convenienti, sommando insieme, quando occorre, quelle note, che alla medesima specie delle decine, delle centinaia, delle migliaia *ec.* appartengono.

Per esempio volendo moltiplicare 2467 per 134, si principj a moltiplicare le note di quel primo numero per l' ultima nota del secondo, che è 4, dicendo: 4 via 7 fa 28, onde si scrive 8 nel luo-

go dell' unità, e portato avanti il 2, essendo 4 via 6 uguale a 24, con esso 2 fa 26, però scrivo 6 nel luogo delle decine, e trattengo 2, che aggiunto a 4 via 4 uguale 16, diviene 18, e però scrivo 8 nel luogo de' centesimi, e trattengo l' unità, indi 4 via 2 diventa 8, e coll' 1 fa 9, che sarà la prima nota da aggiungervi; onde quel dato numero 2467 moltiplicato per 4 riesce 9868. Indi moltiplico lo stesso per l' altra nota 3 della decina, dicendo 3 via 7 fa 21, però scrivo 1 sotto la penultima nota, posto il zero sotto l' ultima, e ritengo il 2, indi moltiplicato 3 via 6 riesce 18, ed aggiuntovi il 2 fa 20, onde scrivo nella parte antecedente esso zero, e trattenuto il 2, moltiplicato il 3 via 4, che fa 12, col 2 riesce 14, onde scrivo il 4 verso la parte millesima, e tengo l' unità, indi 3 via 2 essendo 6, coll' 1 diventa 7, che sarà la prima nota in questa moltiplicazione, però lo stesso primo numero, moltiplicato per 3 decine diviene 74010; poscia lo stesso numero moltiplicato per l' unità posta nella parte centesima, rimane lo stesso con due zeri aggiuntivi, cioè 246700, e sommando questi tre numeri così disposti, trovo riuscirne 330578, e questa sarà la moltiplicazione di 2467 per 134.

2467
134
9868
74010
246700
330578

Però si avverta primieramente, che volendo moltiplicare un numero per 10, basta aggiungere a quel tal numero un zero, e volendo pure moltiplicarlo per 100, basta gli si aggiungano due zeri, e se si moltiplica per mille, basta aggiungervi tre zeri, e così di mano in mano. Per esempio, il

il 45 moltiplicato per 10, viene 450, per cento: riesce 4500, per mille fa 45000. per dieci mila 450000. *ec.*

Similmente, quando un numero finisce in uno, o più zeri, si possono questi separare, e fare la moltiplicazione delle note che restano, e poscia al prodotto aggiungere li zeri già separati; come volendo moltiplicare 320, per 42, basta si moltiplichi 32 per 42, ed al prodotto 1344 aggiungasi uno zero, che riuscirà 13440. Anzi essendo e nel moltiplicante, e nel moltiplicato alquanti zeri, basterà separarli dall' uno, e dall' altro, e poi moltiplicate insieme le rimanenti note si aggiungeranno al prodotto tutti quegli zeri, che si erano levati dall' uno, e dall' altro; così volendo moltiplicare 623000 per 18400 basterà moltiplicare 623 per 184, che ne siuscirà 114632, ed aggiuntivi li cinque zeri levati da' detti numeri proposti, si averà l' intero prodotto 11463200000, che appunto sarà il prodotto di 623000 per 18400, come doveva farsi.

Si avverta pure, che tanto è il moltiplicare de' due numeri il primo col secondo, quanto moltiplicare il secondo col primo; però di essi numeri proposti a moltiplicarsi, talvolta è utile prendere quello, che è composto di note più semplici, e che danno più facile la moltiplicazione dell' altro con questo, onde riesce più agevole il prodotto, e meno soggetta agli errori sarà la moltiplicazione; come per esempio, dovendosi moltiplicare 785 per 23 riesce più facile il moltiplicare il primo per mezzo del secondo, cioè per 3 e per 2, che il moltiplicare il secondo per 5, e per 8, e

per

per 7; ed ancora è meglio moltiplicare il maggiore per il minore, che questo per quello, sebbene torna poi lo stesso in qualsivoglia modo si disponga l'operazione.

Volendo poi riprovare se siasi bene operata la moltiplicazione, si potrà rifarla nell' altro modo; cioè se si è moltiplicato il primo pel secondo, si moltiplichi pure il secondo per il primo, dovendoci tornare il medesimo: per esempio, essendosi di sopra moltiplicato 2467 per 134 si può di nuovo moltiplicare il 134 per 2467, cioè per 7, si moltiplichi, e ne riuscirà 938, indi per 6 diventerà 804, poscia per 4, averemo 536, indi per 2 riuscirà 268; li quali numeri posti secondo l' ordine suo, aggiungendo all' 804 un zero, al 536 due zeri, ed al 268 tre zeri, sommandogli, ne riesce come prima la moltiplicazione 330578, onde fu fatta bene ancora la prima.

134
2467
938
8040
53600
268000
330578

Essendo pure il 134 uguale al doppio di 67, si potrebbe moltiplicare il 2467 per 67, che sarebbe 165289, il che moltiplicato per 2 farà pure 330578 come sopra; onde è fatta benissimo tale moltiplicazione; Anzi in un altra maniera può rifarsi la moltiplicazione, osservando, che il 134 è uguale al 100, al 10, al 20, ed al 4, però moltiplicando il 2467 per 100, sarà 246700, indi per 10 fa 24670, poscia per 20 riesce 49340, e finalmente per 4 sarà 9868, li quali numeri computati insieme, fan-

246700
24670
49340
9868
330578

fanno l' iſteſſa ſomma 330578. uguale all' iſteſſa moltiplicazione di 2467, per 134, onde in tutte quelle maniere è ben fatta, ed in ſimili modi ſi potrà moltiplicare qualunque numero con un altro, che ſi proponga.

Si potrebbe ancora rigettare il 9 dalle note di un numero de' due da moltiplicarſi, e fermarne l' avanzo, e ſimilmente dall' altro cavatone l' avanzo del 9, moltiplicare l' uno nell' altro avanzo, di cui pure detratto il 9, ſi oſſervi, ſe nel prodotto della moltiplicazione vi ſia lo ſteſſo eceſſo del 9. Per eſempio, moltiplicando 635 per 24, moltiplicato quello per queſto, cioè per 4, e per 2, ſe ne troverà 15240 prodotto della moltiplicazione; ora l' ecceſſo del 9 in 635 è appunto 5 (perchè 6, e 3 fanno 9) e nel 24 detto ecceſſo ſarà 6 (compoſto di 4 e 2) ora 5 via 6 fa 30, in cui l' ecceſſo ſopra il nove è il 3; biſogna dunque vedere, ſe lo ſteſſo ecceſſo ſia nel numero ridotto della moltiplicazione 15240; In eſſo 5 e 4, fanno il 9, poſcia il 2 con l' uno fa il 3; dunque vi è lo ſteſſo ecceſſo di 9, che era nel prodotto degli ecceſſi de' numeri moltiplicandi, onde non è fatta male la moltiplicazione; che ſe non foſſe riuſcito il medeſimo avanzo, non ſarebbe ben fatta. Similmente nella propoſta moltiplicazione al di ſopra di 2467, in 134, nel primo facendoſi 9, il 2 col 7, e riuſcendo 10 il 4 col 6, rimane l' ecceſſo del 9 ſolamente 1, e nell' altro numero 134, ſi trova 4, e 3 ſette, ed 1, fa 8, il quale moltiplicato per 1, fa pure 8; ſicchè bi-

```
  635
   24
-----
 2540
12700
-----
15240
```

biſogna, che pure nel prodotto della moltiplicazione 330578 ci ſia il medeſimo 8 per eccеſſo di 9; in fatti 3 e 3 fanno 6, e 5 fanno 11, e 7 farà 18, che ha 2 volte il 9; indi reſta l' 8 eccеſſo di 9, come doveva eſſervi, e però è ben fatta ivi pure la moltiplicazione.

Che ſe in uno de' numeri da moltiplicarſi, detratto il 9, nulla vi avanzaſſe, benchè vi foſſe nell' altro numero l' eccеſſo del 9, non occorre badarci, perchè moltiplicato il 9 per qualunque altro numero rieſce pure noveſimo, onde ancora nel prodotto della moltiplicazione nulla ci potrà avanzare ſopra il 9, come per eſempio, volendo moltiplicare 6813 per 24, come che nel primo il 6 e 3 fa 9, ed ancora 8 e 1 fa 9, e nulla ci avanza, però moltiplicando il primo per 4, e poſcia per 2, la cui ſomma rieſce 163512, ſi vede, che in eſſa pure non vi è avanzo veruno di 9, perchè 6 e 3 fanno 9, e 5 con 2 fanno 7, e con le due unità rieſcono pur 9, e nulla ci avanza, che ſe vi foſſe qualche avanzo non ſarebbe fatta bene la moltiplicazione.

6813
24
27252
13626
163512

CAPITOLO VI.

Del dividere i numeri nella medeſima ſpecie.

Volendo dividere qualunque numero maggiore per mezzo di un minore, ſi principia l' operazione dalla ſiniſtra, cioè dalle prime, non dalle ultime note dell' unità, oſſervando di applicare il diviſore a tante note del numero dividendo, che

che almeno possa una volta contenersi in esso, o alquante volte meno di dieci; onde si sottoscrive la nota del numero ivi trovato, e quell' avanzo, che si farà in esso, si unisce alle note susseguenti del proposto numero, e vi si rimette sotto il divisore per ricercare quante volte di nuovo contengasi in esso; indi notando pure il numero del divisore ivi trovato, ed aggiuntone l' avanzo all' altre note seguenti, se vi sono, che comprendano esso divisore, si fa la sottoscrizione dell' altro numero trovatovi; ed in ultimo avanzandone qualche cosa, con essa se ne farà una frazione denominata dal medesimo divisore, come ne' seguenti esempj.

Sia da dividersi 249 per 3; non entrando il 3 nel 2, bisognerà paragonarlo alli 24, in cui trovandolo 8 volte, perciò dopo una lunetta si scrive 8; indi si paragona il 3 col 9, in cui entrando tre volte, si aggiunge dopo l' 8 il 3, e però la divisione resta compiuta nel numero 83.

```
249
 3   (83
```

Volendo poi dividere 17336 per 22, non entrando 22 in 17, si paragona al 173, in cui vi entra 7 volte esso 22, che sarebbe 154, e ne avanza 19, al quale aggiuntavi l' altra nota 3, si cerca quante volte entri il 22 nel 193, e si vede ritenercisi 8 volte, che sarebbe 176, onde ne avanza 17, però aggiuntavi la nota 6 ritorna 176, in cui di nuovo si comprende 8 volte il 22, però dopo la lunetta si dovranno scrivere il 7 e l' 8 due volte, onde la divisione sarà 788 senza veruno avanzo.

```
17336
 22      (788
 193
  22
  176
  22
```

Se

Se poſcia ſi divide 2594 per 12, queſto nel 25 entra due volte, e ne avanza 1, ſcrivaſi però dopo la lunetta il 2; ed all' 1 aggiunto il 9 ſi fa 19 nel quale il 12 entra una volta, però dopo il 2 ſi ſcrive 1, ed avanzandoci 7 aggiuntovi il 4, rieſce 74, in cui trovaſi il 12 ſei volte, onde ſi ſcrive dopo il 21 il 6, ma eſſo 12 via 6 facendo 72, ne avanzano 2, che però alla diviſione 216 biſognerebbe aggiungervi per frazione ancora $\frac{2}{12}$, i quali diviſi ambidue per mezzo, ſi dovranno fare la ſteſſa frazione $\frac{1}{6}$; onde la diviſione di 2594 per 12 rieſce 216 $\frac{1}{6}$, che diraſſi dugento ſedici, e un ſeſto.

```
2594
12        (216 1/6
 19
 12
  74
  12
```

Si oſſervi però, che la diviſione di 17336 per 22 poteva farſi di 8668 per 11, e quella di 2594 per 12, ſi ſarebbe potuta fare del numero 1297 per 6; imperocche li due numeri propoſti eſſendo pari, ſi poſſono ambidue dividere per mezzo, e ſe riuſciſſero di nuovo pari, ſi dovrebbero di nuovo ambidue dimezzare, fino a tanto, che uno di eſſi riuſciſſe diſpari, eſſendo che la ſteſſa quantità rieſce nella diviſione di qualunque numero in un altro, come riuſcirebbe dal doppio di quello, nel doppio di queſto, o dal quarto dell'uno nel quarto dell' altro, o di qualſivoglia parte dell' uno nella parte ſimile dell' altro; onde ancora, ſe tutti due i numeri poteſſero dividerſi ancora per 3, o per 5, o per 9, o per 10, o per 100. *ec.* baſta fare la diviſione di quelle parti in vece de' dati numeri interi: Così proponendoſi la diviſione di

2430

2430 per 50, basta fare la divisione di 243 per 5, che sarà $48\frac{3}{5}$, essendo 5 via 48 il 240, cui rimane il 3 divisibile per 5, e ciò sarà l' istessa divisione di 2430 per 50; similmente proponendosi la divisione di 963 per 213, divisi per 3 ambidue questi numeri, diviene il primo 321, il secondo 71, e quello diviso per questo darà $4\frac{37}{71}$, perchè 4 via 71 fa 284, al quale aggiunto il 37 fa 321.

E chi volesse dividere 3800 per 700., basterà dividere 38 per 7, che sarà $5\frac{3}{7}$, imperocchè 7 via 5 fa 35, e dal 38 ne avanza il 3, che importa quella frazione $\frac{3}{7}$ da aggiungersi al 5.

Essendo da dividersi un numero grande con un altro di molte note, conviene applicare questo ad altrettante note di quello, se pure non riuscisse minore la prima nota del dividendo della prima nel divisore, altrimenti si porranno le note di questo, sotto un alquanto maggior numero di quello, per osservare, che ci entri dentro; e se vi fosse contenuto una volta sola, si scriverebbe dopo la lunula una unità; se poi vi entra più volte, si moltiplichi il divisore per 2, o per 3, o per altro numero, osservando se entra in quella parte del numero dividendo; e quello, che ci avanza si aggiunga ad un altra delle note seguenti, e ridottovi sotto lo stesso divisore, si proseguisca la divisione, osservando come entri questo in quello, e similmente si proseguisca, come apparirà nel seguente esempio.

Sia da dividersi il numero A per il numero B; vedendoli ambidue pari, si divideranno per mezzo tutti

A	742806253 8
B	61024572
C	371403126 9
D	30512286

ti e due, sicchè da A ne provenga C, e da B ne risulti D; ma osservando che sono ancora C, e D compresi da note, che fanno il 9 senza veruno eccesso (come ancora così erano li primi A e B) converrà ancora dividerli per 9, che riusciranno questi altri due E, ed F; però si dividerà questo da quello; dunque si sottoponga l'F al G, in cui sono altrettante note di E, quante sono nel divisore, e si vedrà, che vi entra una volta sola, onde dietro la lunula si scrive 1, e cavandone ciò, che di più vi rimane H, gli si aggiunge l' altro numero di E, che è il 4 delli due tralasciati,

E	612670141	
E	3390254	
G	6126701	
F	3390254	
		(180
H	2736447	
K	27364474	
F	3390254	
L	27122032	
M	242442	
N	2424421	

e fatto così il numero K, gli si pone sotto il medesimo F, che ci si vede contenuto 8 volte, però nella lunula si aggiunge l' 8, e perchè l' ottuplo di F sarà L, e questo tolto dal K riesce l' M, al quale aggiunta l' ultima nota 1 del numero E, che sarà il numero N, in cui non entrando il numero F, maggiore di esso, conviene aggiungere nella lunula lo zero; sicchè 180 sarà la quantità de' numeri interi della divisione, ma bisognerà aggiungerci la frazione di N diviso per F, cioè tutta la divisione de' suddetti numeri cioè di A per B, dovrà essere per appunto 180. $\frac{2424421}{3390254}$

N $\frac{2424421}{3390254}$ F

Vo-

Volendo poi dividere un numero per 10. baſta ſepararne l' ultima nota, da cui ſi farà la frazione del diviſore 10. Per eſempio, volendo dividere per 10 il 253 baſterà ſcrivere 25 $\frac{3}{10}$, e volendo dividere per 10 il 3457, ſi averà per diviſione 345 $\frac{7}{10}$. E ſe un numero ſi vorrà dividere per 100, biſognerà ſepararne le due note ultime, colle quali ſi farà pure la denominazione di eſſo diviſore 100; così 849178 diviſo per 100 ſarà 8491 $\frac{78}{100}$, ma queſti 78, e 100 potendoſi dividerli pel mezzo, converrà farne la diviſione, e ne naſcerà la frazione $\frac{39}{50}$. Così pure l' 8497 diviſo per 100, riuſcirà ſolamente 84 $\frac{97}{100}$; e ſimilmente ſe ſi ha da dividere un numero per 1000, dovranno ſepararſi da eſſo le tre ultime note, le quali faranno la frazione da mille denominata, come dovendoſi dividere per mille il numero 458937, ſi dovrà fare 458 $\frac{937}{1000}$ per tale diviſione; e così in altre ſimili.

Per la riprova poi della quantità di eſſa diviſione, baſterà moltiplicare il quoziente per il diviſore, e vedere ſe il prodotto ſia il medeſimo numero propoſto a dividerſi, come certamente eſſer deve, ſe la diviſione ſia ben fatta: Per eſempio, ſe dividendo 249 per 3, ſi trova 83, biſogna, che 83 per 3 moltiplicato faccia pure 249; e così pure ſe 17336 diviſo per 22 fa 788, converrà che il 788 moltiplicato per 22, faccia 17336; e ſe vi ſono alla diviſione delle frazioni, oltre il prodotto del diviſore co' numeri interi della diviſione, vi ſi aggiunge ancora il numeratore, che è al di ſopra nella frazione; come per eſempio, avendo diviſo 321 per 71, onde ſi ritrovò 4 $\frac{37}{71}$, baſterà moltiplicare il 71 per 4, che farà 284, ed aggiuntovi

tovi li 37, ne proviene lo ſteſſo 321, come di ſopra ſi è detto.

Similmente, quando ſia fatta con eſattezza la diviſione, biſogna che l'eceſſo del 9 del diviſore, moltiplicato con l'eceſſo del 9 del quoziente, faccia lo ſteſſo eceſſo del 9, che ha il numero, il quale fù diviſibile. Per eſempio 1104 per 23 diviſo, ci dà per quoziente il 48; in queſto l'eceſſo del 9 ſarà 3, e nel diviſore è 5, ora 3 via 5 fa 15, che è un eceſſo 6 di 9, ma ancora nel dividendo 1104 ſi trova per eceſſo di 9 il 6, dunque è ben fatta la diviſione; ma ſe pure nel quoziente vi è una frazione, al prodotto dell'eceſſo di 9 del diviſore, con quello del numero ſciolto nella diviſione, gli ſi aggiunga l'eceſſo del 9, che ha il numeratore della frazione, e queſta ſomma dovrà eſſere uguale all'eceſſo di 9, che ha il numero dividendo: Per eſempio, ſi divida 578 per 13, ſi troverà il quoziente 44 $\frac{6}{13}$, dunque l'eceſſo del diviſore 13 ſopra il 9 eſſendo 4, e l'eceſſo di 44 eſſendo 8, ſi moltiplichi 4 via 8, fa 32, il cui eceſſo ſopra il 9 è 5, aggiunto a queſto 5 il 6, ſi farà 11, cioè l'eceſſo di 9 ſarà 2, il che pure ſi trova nel dividendo 578, perchè 5, e 7 fa 12, e 8 fa 20. Così pure dividendoſi 1350 per 23, ſi troverà eſſere 58 $\frac{16}{23}$ il ſuo quoziente; ed eſſendo l'eceſſo di 9 nel 23 il 5, nel 58 il 4, e 5 via 4 facendo 20, ſi ha per tale eceſſo di 9 il 2, al quale aggiunto l'eceſſo di 16, che è 7, ſi fa per appunto 9, ed ancora il dividendo ha il 135 per 9 ſenza veruno eceſſo, perciò quella diviſione dovrà eſſere ben fatta, non eſſendovi nel quoziente moltiplicato col diviſore, e compoſto

posto col numero superiore della frazione, veruno eccesso del 9, come non vi è nel dividendo. Che se il dividendo fosse stato 1352, con lo stesso divisore 23, sarebbe stato il quoziente 58 $\frac{18}{23}$, ed esso numero 18 non avendo eccesso di 9, non occorrerà aggiungerlo al prodotto dell' eccesso di 23 coll' eccesso di 58, che abbiamo veduto esser 2, come appunto nel dividendo 1352 vi è l' eccesso di 2 sopra il 9.

CAPITOLO VII.

Del moltiplicare i numeri di specie diversa.

Questa moltiplicazione de' numeri di specie diversa è assai più difficile di quella de' numeri della medesima specie; imperocchè essendo i numeri composti di varie specie, converrà prima ridurre ciascuno alla specie infima, e poscia moltiplicarli insieme, quindi per via della divisione ridurre il prodotto a' termini di ciascuna specie naturale. Ma però conviene ancora osservare, che moltiplicando qualche quantità continua espressa in detti numeri, con un altra quantità continua parimente in numeri espressa, il prodotto non sarà una quantità del medesimo ordine, con ciascuno de' numeri producenti; ma d' un ordine più alto, paragonandosi questo a quello, come una superficie alla linea, che gli serve di semplice lato, o come il corpo ad un piano, che gli serve di superficie.

Così per esempio, 3 braccia di lunghezza, se si moltiplicassero solamente per un numero 4, certo riuscirebbero 12 braccia di essa lunghezza; ma

se quelli si devono moltiplicare per 4 braccia pure di larghezza, ne doveranno resultare 12 braccia quadre, che saranno d' ordine superiore alle 12 braccia lineari esprimenti la sola lunghezza; similmente 8 soldi di lunghezza moltiplicati per 3 soldi pure di larghezza, saranno 24 soldi superficiali; e non è già vero, che questi soldi 24 equivagliano ad un braccio di soldi 20 con 4 soldi di più del suo genere, perchè non bastano soldi 20 a fare un braccio quadro, o superficiale, ma ci vogliono soldi 400; e la ragione si è, perchè 20 soldi di lunghezza, che fanno nella lunghezza un braccio, moltiplicandoli per 20 altri soldi, danno il valore d' un braccio quadrato, espresso con soldi 400 superficiali; similmente facendosi un soldo di lunghezza con 12 danari, se questi si moltiplicheranno con altri 12 danari, faranno un soldo quadrato, col valore di 144 danari di superficie, onde siccome un braccio quadro si fa con 400 soldi quadrati, bisogna che nello stesso valore di un braccio quadro vi si includano 57600. danari superficiali.

Posto questo avvertimento, prendiamo un esempio. Sia una Camera di lunghezza braccia 8 soldi 5 e danari 4, e sia la sua larghezza braccia 7 soldi 6 e danari 8, e si convenga moltiplicare quella in questa per ricavarne la quantità del pavimento, che sarà composto di alquante braccia quadre, con alcuni soldi, e danari quadrati, e fatta la moltiplicazione si trova, che saranno braccia quadre 60 soldi quadri 248, e da-

Braccia.	*Soldi.*	*Danari.*
8.	5.	4
7.	6.	8
60.	248.	128

danari quadri 128, imperocchè avendo ogni ſoldo danari 12, ed ogni braccio ſoldi 20, averà il braccio danari 240, onde braccia 8 averanno danari 1920, e li ſoldi 5 averanno danari 60, a' quali aggiunti li danari 4 della lunghezza, il tutto ſarà danari 1984; ma quanto alla larghezza, braccia 7 ſaranno danari 1680, e li ſoldi 6 ne vengono danari 72, a' quali aggiunti li danari 8, rieſce il tutto danari 1760; però moltiplicando queſti 1760, con quelli danari 1984, ne riſultano danari quadrati 3491840.

1920
60
4
1984

1680
72
8
1760

Per determinare poi quante braccia quadre, e quanti ſoldi quadrati, e quanti danari quadrati ne riſultino in quella ſuperficie del pavimento della camera, eſſendo ogni braccio quadro compoſto di 57600 danari quadrati, biſogna dividere eſſo 3491840 per 57600, onde ne procederanno braccia quadre 60, importando queſte danari quadri 3456000, ed il reſiduo ſarà 35840, che diviſo per 144 danari, valore di ciaſcun ſoldo quadrato, ſi troverà per quoziente 248 ſoldi quadrati, importando queſti danari quadri 35712, onde poi rimangono 128 danari quadrati, eſſendo manifeſto, che appunto 3456000 (che ſono 60 braccia quadre) con 35712 (che ſono 248 ſoldi quadri) e con li 128 danari quadri ſommati inſieme, fanno il numero 3491840 di danari quadrati, che ſi trovò in detta moltiplicazione; e però fù ben fat-

3456000
35712
128
3491840

ta, corrispondendo benissimo insieme tutti i calcoli di sopra esposti.

Nel trattato aritmetico di Giuseppe Maria Figatelli, ricorretto, ed accresciuto da Gaetano Guidi Bolognese, verso il fine del Capitolo terzo, si apporta, che moltiplicando le lire 4, soldi 5, e danari 6 con lire 3 soldi 10, e danari 8; ne debba succedere lire 15, soldi 2, e danari 1 con $\frac{1}{5}$, il che io mostrerò esser falso, dovendone piuttosto riuscire lire 15, e soldi quadri 42; imperocchè le lire comprendendo 20. soldi, e li soldi 12 danari, è certo, che lire 4 sono soldi 80, e però danari 960, li soldi 5 sono danari 60, ed aggiunti li danari 6, la somma di essi sarà danari 1026; poscia le lire 3 essendo soldi 60 sono danari 720, li soldi 10 sono pure 120 danari, ed aggiunti danari 8, la loro somma sarà 848 danari; però moltiplicando quelli con questi, si fanno 870048 danari quadrati, perchè 848 in 1000, fa 848000, in 20 fa 16960, ed in 6 fa 5088, la somma de' quali è 870048, ed avendo la lira quadra 57600 danari quadrati, si vede, che questo è in quello 15 volte, perchè moltiplicato 57600 in 15 farà 864000, e tolto questo da 870048, ne rimane 6048

lire	4.	5.	6
lire	3.	10	8
lire	15.	42	—
			960
			60
			6
			1026
			720
			120
			8
			848
			1026
		in	848
			848000
			16960
			5088
			870048

6048; ma il ſoldo quadro ha 144 danari quadrati, che moltiplicati in 42 fanno pure 6048; dunque la moltiplicazione di lire 4 ſoldi 5, e danari 6 in lire 3 ſoldi 10, danari 8, fa lire quadre 15, e ſoldi quadri 42, come abbiamo detto.

57600 *in* 15
864000
870048
meno 864000
rimane 6048
uguale a 144 *in* 42

Si può ancora in un altra maniera fare tal moltiplicazione, eſſendo ogni ſoldo il vigeſimo della lira, ed un danaro è $\frac{1}{240}$ di eſſa lira, perciò lire 4 ſoldi 5, e danari 6, ſono lire 4 e $\frac{5}{20}$ e $\frac{6}{240}$, cioè lire 4 $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{40}$, che ſarà pure 4 $\frac{11}{40}$ (poichè $\frac{1}{4}$ è $\frac{10}{40}$) ſimilmente lire 3 ſoldi 10 e danari 8, ſaranno lire 3 $\frac{10}{20}$ e $\frac{8}{240}$, cioè lire 3 $\frac{1}{2}$, e $\frac{1}{30}$, che ſaranno lire 3 $\frac{16}{30}$ (perchè $\frac{1}{2}$ è $\frac{15}{30}$) o dicaſi piuttoſto lire 3 $\frac{8}{15}$; e moltiplicando le lire 4 $\frac{11}{40}$ in 3 $\frac{8}{15}$, ſi averanno lire 12 $\frac{32}{15}$ è $\frac{33}{40}$ ed $\frac{88}{600}$; La frazione $\frac{32}{15}$ e 2 $\frac{2}{15}$, la $\frac{88}{600}$ ſarà $\frac{11}{75}$; dunque eſſa moltiplicazione averà lire 14 $\frac{2}{15}$ e $\frac{33}{40}$ ed $\frac{11}{75}$; ma $\frac{2}{15}$ è uguale a $\frac{10}{75}$ (eſſendo il 15 via 5 uguale a 75, ed il 2 via 5 uguale a 10.) dunque rieſce lire 14 $\frac{21}{75}$, e $\frac{33}{40}$; ma il $\frac{21}{75}$ è lo ſteſſo che $\frac{7}{25}$ (dividendo per tre il 21, ed il 75.) e $\frac{7}{25}$ con $\frac{33}{40}$ è $\frac{1105}{1000}$, perchè la ſomma di due frazioni può farſi moltiplicando il numeratore di ciaſcuna col denominatore dell' altra, e ciaſcuno denominatore con l' altro denominatore (come ſe ne parlerà nel Capitolo XI.) onde 7 via 40 fa 280, e 33 via 25 fa 825, che aggiunto all' altro 280 fa per l' appunto 1105, ed il 40 via 25 fa 1000, e tale frazione $\frac{1105}{1000}$ è uguale ad 1 e $\frac{105}{1000}$, anzi 1 e $\frac{21}{200}$, dunque la moltiplicazione fa lire 15 $\frac{21}{200}$,

ma $\frac{21}{200}$ è lo ſteſſo che $\frac{42}{400}$, ed ogni ſoldo quadrato è la quadricenteſima parte della lira quadra, ſiccome il ſemplice ſoldo è la parte vigeſima della ſemplice lira, eſſendo appunto il quadrato di 20. eſſo 400. dunque tale moltiplicazione importa lire quadre 15, e ſoldi quadri 42, come ſi era nell' altra maniera dimoſtrato.

Se poi un numero compoſto di più ſpecie doveſſe moltiplicarſi per un ſemplice numero, come ſe ſcudi 15 lire 4 ſoldi 13, e danari 8 doveſſero moltiplicarſi per 6, allora non eſce dall' ordine ſuo la ſpecie della quantità moltiplicata, onde baſta moltiplicarne ciaſcuna ſpecie per il numero dato, cominciando però dall' inferiore, e ſecondo il ſuo accreſcimento riducendolo nelle ſpecie ſuperiori. Così 6 via 8 fa 48 danari, che importa 4 ſoldi, ciaſcuno de' quali è compoſto di danari 12; e 4 via 12 è pure 48, indi moltiplicando ſoldi 13 per 6 ne riſultano 78 ſoldi, a' quali aggiunti gli altri 4, rieſcono 82 ſoldi, de' quali ogni vigeſimo facendo una lira, ne rieſcono lire 4 e ſoldi 2, poſcia le lire 4 moltiplicate per 6 fanno lire 24, e con le altre 4 rieſcono lire 28, delle quali ogni 7 lire facendo lo ſcudo Fiorentino, biſogna importino ſcudi 4; e finalmente moltiplicando per 6 gli ſcudi 15 rieſcono ſcudi 90, ed aggiunti gli altri 4 ſaranno ſcudi 94; dunque moltiplicati pel numero 6 gli ſcudi 15, lire 4, ſoldi 13, e danari 8, ne rieſcono ſcudi 94, e ſoldi 2 ſolamente, e queſto è il prodotto di tale moltiplicazione, la quale non può farſi più facilmente, ſe non in queſta maniera; e ſimilmente potrà farſi qualunque altra molti-

pli-

plicazione di qualſivoglia altra ſpecie in qualſivoglia numero dato.

Per via dell' eceſſo di 9 può moſtrarſi pure, non eſſere mal fatta tale moltiplicazione; ſi oſſervi però, che l' eceſſo ſopra il 9 ne' ſoldi deve moltiplicarſi per 3, avendo ciaſcun ſoldo danari 12, il cui eceſſo ſopra 9 è 3, l' eceſſo poi di 9 nelle lire, che hanno 20 ſoldi, deve moltiplicarſi per il doppio di 3, cioè per 6; l' eceſſo degli ſcudi, che 7 volte ciaſcuno ha la lira, deve moltiplicarſi per 7 in 6, che ſarebbe 42, onde eſſo eceſſo è il 6; dunque eſſendo propoſti gli ſcudi 15, il cui eceſſo ſopra 9 è 6, eſſendo 6 via 6 uguale a 36, non vi è eceſſo di 9; ma per le lire 4, moltiplicato il 4 in 6, fa 24, dove pure vi è l' eceſſo di 6; ne' ſoldi 13 l' eceſſo è 4, che moltiplicato per 3 fa 12, che pure ha l' eceſso 3, e con l' antecedente eceſſo 6 delle lire fa 9, il che ſi laſcia; dunque ſolamente ci reſta il numero 8 de' danari, che moltiplicato pel numero moltiplicante, cioè 6, ſarebbe 48, che è un eceſſo ſopra al 9 ſolamente di 3. Quanto alla moltiplicazione, che da ſcudi 94, e ſoldi 2; l' eceſſo degli ſcudi ſopra 9 è 4, che moltiplicato in 6 fa 24, che pure ha l' eceſſo di 6, e l' eceſſo 2 de' ſoldi moltiplicato in 3 fa pur 6, dunque la ſomma di 6, con l' altro 6 ſono 12, che ha l' eceſſo pure di 3, come di ſopra ſi è veduto competere al prodotto di ſcudi 15 lire 4 ſoldi 13, e danari 8 moltiplicati in 6; però rieſce ben fatta quella moltiplicazione.

CA-

CAPITOLO VIII.

Del dividere i numeri di più ſpecie con un numero ſemplice, o con numeri di altrettante ſpecie.

DOvendoſi per eſempio convenire 7 perſone alla paga di lire 26, ſoldi 9, e danari 8, conviene dividere la ſomma di queſte ſpecie pel numero 7, acciò ſi ſappia quello, che ciaſcheduna di tali perſone doverà pagare. Primieramente diviſe le lire 26 per 7, toccheranno lire 3 per ciaſcheduno, perchè 3 via 7 fa 21, ed avanzandoſi 5 lire, queſte ſi riſolvono in tanti ſoldi, che ne importeranno 100, ed aggiuntovi il numero de' ſoldi 9, biſognerà dividere 109 per 7, che riuſciranno ſoldi 15, i quali da ciaſcheduno pagandoſi ſaranno 105, dunque ne avanzeranno ſoldi 4, che riſoluti in danari ſaranno 48, ed aggiunti gli altri 8 danari fanno 56, i quali diviſi per 7 riuſciranno appunto 8 danari per ciaſcheduno; ſicchè ogni perſona dovrà pagare lire 3 ſoldi 15, e danari 8. onde ſarà ben fatta la propoſta diviſione.

Se poi vi avanzaſſero altri danari, biſognerà fare di quell' avanzo una frazione denominata dal numero della diviſione. Per eſempio, ſe la ſteſſa paga di lire 26 ſoldi 9, e danari 8 ſi doveſſe dividere ſolamente per 3 perſone; le lire 26 diviſe per 3 danno lire 8, che è il terzo di 24, e ne avanzano 2, che ridotte in ſoldi ne fanno 40, cui aggiunto il 9, e diviſo il numero di 49 in 3, ne vengono 16, che ſono il terzo di 48, onde

avanza

avanza un ſoldo, il quale avendo 12 danari con gli altri 8, rieſcono 20, e queſti diviſi per 3, ne riſultano 6, che ſono il terzo di 18, ed avanzano 2 danari, il quale avanzamento diviſo per 3 ci da la frazione di $\frac{2}{3}$; ſicchè qualunque perſona dovrà pagare lire 8, ſoldi 16, e danari 6 con $\frac{2}{3}$, e così ſarà compiuta la diviſione, la quale ſe ſi doveſſe fare da eſſi più volte, per eſempio qualunque meſe, dovrebbe ciaſcuno in tre meſi dare tutta la paga di lire 26, ſoldi 9, e danari 8.

Dovendoſi poi dividere un numero di più ſpecie, con un altro di altrettante ſpecie, converrà ridurre queſto, e quello al numero della loro infima ſpecie, e poi fatta la diviſione, ridurre il quoziente nelle ſue ſpecie. Per eſempio, il piano di una ſuperficie di braccia quadre 60, con ſoldi quadri 248, e danari quadri 128, ſi vorrebbe dividere per la lunghezza di un lato di braccia 7 ſoldi 6, e danari 8; ſi riduca primieramente la quantità dividenda, nel numero dell' infima ſua ſpecie, cioè de' ſuoi danari ſuperficiali, e poſcia la quantità dividente ſi riduca nel numero inferiore delli danari ſemplici; ſicchè avendo ogni braccio quadro 57600 danari ſuperficiali, biſogna che le braccia 60 ne contengano 3456000, ed i ſoldi quadri avendone ciaſcuno 144, i ſoldi 248 conterranno danari ſuperficiali 35712, ed aggiunti gli altri danari 128, la ſomma di tutti ſaranno danari ſuperficiali appunto 3491840;

$$\begin{array}{r} 3456000 \\ 35712 \\ 128 \\ \hline 3491840 \end{array}$$

ſimilmente ogni braccio di lunghezza avendo 240 danari ſemplici, nelle braccia 7 ve ne ſaranno

1680

1680, e ne' soldi 6 (essendovi 12 danari per ciascheduno) importeranno danari 72, onde quelli e questi, con gli altri 8 danari, fanno danari 1760; dividasi adunque il primo 3491840, con questo secondo 1760, anzi essendovi il zero in ambidue, può levarsi, ed i rimanenti numeri 349184 e 176 potendo ancora esser divisi ambidue per 16, riuscirà quello 21824 e questo 11, perciò basterà dividere esso 21824 per 11, e ne verrà appunto 1984; questi adunque semplici danari 1984, si veda quante braccia semplici, e quanti soldi importino; ogni braccio avendone 240, se ne troveranno ivi braccia 8, che importano danari 1920, e ne rimangono 64, e questi divisi per 12, che compongono il soldo, se ne trovano soldi 5 (che fanno 60 danari, e ne restano danari 4; dunque la superficie composta di braccia quadre 60, e soldi quadri 248, e danari superficiali 128, divisa per uno de' suoi lati cioè per braccia 7 soldi 6 e danari 8 di lunghezza, ci da l'altro lato di braccia semplici 8, soldi 5, e danari 4, che tale è la divisione fatta esattamente con questo metodo, come in fatti si vedrà moltiplicando le braccia 7, soldi 6, e danari 8, in braccia 8 soldi 5 e danari 4, dal che ne riuscirebbero appunto braccia quadre 60, e soldi quadri 248 con danari superficiali 128, imperocchè si è veduto essere le braccia 7 soldi 6 e danari 8 il numero de danari 1760, poscia le braccia 8 soldi 5 e danari 4, la somma di danari 1984, onde poi moltiplicando 1984 per

1680
72
8
1760

1920
60
4
1984

1760

1760 (1760 via 4 fa 7040, lo steſſo via 80 fa 140800, il medeſimo per 900 è 1584000, ed eſſo per 1000 fa 1760000) ne proviene 3491840, qual ſomma abbiamo veduto, che corriſponde appunto a quella de' danari ſuperficiali di 60 braccia quadre, di ſoldi 248, e di danari 128; onde è ben fatta la diviſione, corriſpondendo a tale moltiplicazione.

7040
140800
1584000
1760000
3491840

Se poi nel dividere la ſomma di quei danari ſuperficiali, con l' altra ſomma de' ſemplici vi avanzaſſe qualche altro numero, gli ſi aggiungerebbe la frazione del numero reſiduo, denominata dal diviſore, come ſi è detto di ſopra. Per eſempio eſſendo la ſuperficie 3 braccia quadre, ſoldi 4 quadri, e danari ſuperficiali 24, dividendola per un lato di braccia 1 ſoldi 13, e 4 danari ſemplici, le 3 braccia quadre ſaranno di danari ſuperficiali 172800 (eſſendo ogni braccio di 57600 danari, il cui triplo è il numero ſopra addotto) li 4 ſoldi ſaranno danari 576 (avendone ognuno 144, che quadruplicato fa il ſuddetto numero) però agiunti li danari 24 ſi ha la ſomma di danari ſuperficiali 173400. E quanto alle braccia di lunghezza, che è un ſolo, conterrà danari ſemplici 240, e li ſoldi 13 avendo ciaſcuno danari 12, ne importeranno 156, ed aggiunti li 4 danari fanno in tutto 400, però dividendo il numero 173400 per 400, cioè tolti di quà, e di là li due zeri, baſta di-

172800
576
24
173400

240
156
4
400

vi-

videre 1734 per 4, anzi diviso l'uno, e l'altro per 2, si dividerà il numero 867 per 2, dal che ne risulta 433 $\frac{1}{2}$, onde levati 240 si ha un braccio di lunghezza, e rimangono danari 193 $\frac{1}{2}$, de' quali vi saranno soldi 16; perchè ogni soldo avendo 12 danari, ne provengono alli 16 soldi i danari 192, onde rimane, semplici danari 1 $\frac{1}{2}$; sicchè l'altro di tale superficie divisa, dovrà essere braccia 1, soldi 16, e danari 1 $\frac{1}{2}$; il che dovea ritrovarsi per questa divisione.

E può ancora osservarsi l'esattezza della medesima divisione, se viceversa moltiplicando il quoziente col divisore, ne risulterà la stessa quantità, che fù proposta a dividersi; come moltiplicando braccia 1 soldi 16 danari 1 $\frac{1}{2}$, per braccia 1. soldi 13, e danari 4, ne risulteranno braccia quadre 3 soldi 4, e danari superficiali 24, che erano dati a dividersi; imperocchè nel quoziente sono danari 433 $\frac{1}{2}$, e nel divisore danari 400, e questi prodotti in quelli fanno appunto danari superficiali 173400, che si è veduto essere nella quantità proposta a dividersi.

Anzi vi è il medesimo eccesso di 9 tanto nel 173400, che è 6 (perchè 4 e 3 fa 7, ed altri 7 fanno 14, e con l'unità 15, ed è il 5 con l'1 uguale a 6) quanto nel prodotto di 433 $\frac{1}{2}$ in 400, perchè il 4 con li due 3 fa 10, che è 1, ed il 4 preso dal 400 moltiplicato in 1 $\frac{1}{2}$, fa 4, e 2, che sono pure uguali a 6, come nell' altro prodotto.

CA-

CAPITOLO IX.

Del cavare la radice quadra d' un numero.

QUando si moltiplica un numero per se stesso, il prodotto dicesi *Quadrato*, perchè può disporsi con le sue unità in forma perfettamente quadra, cioè con i lati composti del medesimo numero. Così il 25 è numero quadrato, risultando dal 5 moliplicato in se stesso, ed esso 5 dicesi la radice quadra del medesimo quadrato 25; onde può disporsi in figura quadra, di cui ciascun lato sia composto di cinque punti (se tutti gli altri sono punti) o di cinque unità, o di cinque cifre (essendo l' altre di mezzo parimente unità, o parimente cifre) come nelle figure quì addotte, che ne compongono 25 punti, o 25 unità, o 25 zeri, col lato di 5, che ne è la radice; onde il cercare la radice quadra di un numero proposto è lo stesso, che voler ritrovare qual sia quel numero, che moltiplicato in se stesso farebbe appunto quel tale numero proposto.

• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •

1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1

o o o o o
o o o o o
o o o o o
o o o o o
o o o o o

Non può essere però la radice quadra di qualunque numero, ma solamente de' numeri quadrati; ad ogni modo se il proposto numero non è veramente quadrato, se ne può cercare una prossima radice, non però esatta, ma tale, che moltiplicata in se stessa fa un numero alquanto prossimo

simo

ſimo a quello, di cui cercavaſi la radice, che mai non può eſſere preciſa, benchè accreſciuta, o diſtratta da qualſivoglia frazione.

Primieramente convien ſapere, quali ſiano i numeri veramente quadrati, che corriſpondono alle prime note numeriche, perchè da queſti ſi cava lume per ritrovare la radice quadra, eſatta, o proſſima di qualunque altro numero maggiore; ſi oſſervi però queſta prima ſerie delle radici, e de' loro quadrati nella preſente Tavola.

Radici	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Propoſto quindi un numero, di cui ſi vuole cavare la radice quadra, primieramente ſi punteggi quel numero, cominciando dall' ultima nota della parte deſtra, e procedendo verſo la ſiniſtra punteggiandole non tutte, ma alternativamente, cioè una sì, ed una nò, e quanti punti in eſſo numero riuſciranno eſſere notati, tante note dovrà avere la radice quadra, che vi ſi cerca.

Quindi ſi eſamini dalla ſiniſtra il primo punto, che comprenderà una ſola nota, o pure due inſieme, e ſi riguardi quale ſia il maſſimo quadrato di quelli della Tavoletta antecedente, che incluſo ſi ritrovi in detto punto, e ſe vi ha qualche eccesſo, ſi noti ſotto, e dietro alla lunetta ſcrivaſi la radice del quadrato, che ivi fù ritrovato.

Queſta

Questa stessa radice poi si raddoppj, e con essa così raddoppiata si divida il numero composto da quest' eccesso notato di sotto, e dalla susseguente prossima nota non punteggiata nel proposto numero, ed il quoziente si scriva dietro la lunetta appresso la prima nota ivi posta. Quindi unito lo stesso quoziente colla seconda nota ritrovata, si moltiplichi tutto questo complesso per il medesimo quoziente, sottraendone il prodotto dalle note proposte nel numero fino al secondo punto, notandovi sotto l'eccesso, che forse vi avanzasse.

Al medesimo modo si cercherà la terza nota della radice, similmente raddoppiando le due note già trovate; per cui si divida il numero composto dell' ultimo eccesso, e della prossima nota nel numero proposto; ed il quoziente scrivasi pure dietro la lunetta, appresso le due precedenti note, ed anche scrivasi appresso al detto divisore, moltiplicando tutto ciò, che ne risulta per lo stesso quoziente, e sottraendo il prodotto dalle note del numero proposto continuate fino al terzo punto, e così facendo di mano in mano, fino che all' ultimo, fatta la sottrazione, nulla rimangavi d' eccesso, il che succederà ogni qualvolta il proposto numero sia veramente quadrato; ma se tale non fosse, ci sarebbe l'ultimo avanzo, di cui dovrebbe farsi una frazione denominata dal doppio dell' intera radice fino allora trovata, per averne una radice prossima alla vera composta di quelle note radicali ritrovate, e di tale frazione; il che potrà bastare, non potendosi averne la radice precisa.

Si deve però avvertire primieramente, che se il divisore non entrasse pure una volta in quel numero che occorre dividere, doverà notarsi uno zero nella radice, e tirare avanti l'operazione. Secondariamente se lo stesso divisore entrasse più di nove volte nel numero, che occorre dividersi, non si potrà notare giammai per quoziente verun numero maggiore di 9; ma questo solo, facendovi rimanere nell'eccesso ancora tutto ciò, che ha più di nove volte in se il detto quoziente. In terzo luogo si avverta, che se fatta la moltiplicazione come sopra, il prodotto riuscisse maggiore del numero da cui doveva sottrarsi, allora bisognerà scrivere per quoziente un numero prossimamente minore, ma queste regole meglio si schiariranno con alcuni esempj.

59049	(243
4	
190	44·4
176	176
1449	
1449	483·3
0000	1449

Sia proposto il numero 59049, da cui si desideri cavare la radice quadra. Punteggisi l'ultima nota 9, e lasciata senza punto la penultima 4, si punteggi il zero antecedente, e parimente lasciato il 9, che ci è avanti, si faccia il punto al precedente 5. Poscia si esamini esso 5 corrispondente al primo punto, e si vegga quale è il quadrato

drato

drato contenuto in esso, che si troverà essere 4, la cui radice è 2, però questa radice scrivasi appresso la lunetta, ed avanzando nel 5 l'unità sopra il 4, aggiuntavi la seconda nota 9 si ha 19; il che dividendosi pel doppio della radice 2, cioè per 4, ne riesce altresì 4, essendo esso quattro volte nel 19; però nella lunetta dopo il 2 scrivasi il 4; indi scritto da parte il 4 divisore, e postovi allato l'altro 4 quoziente, si averà 44, il quale moltiplicato per lo stesso 4 quoziente diviene 176, e questo sottratto dalle tre note 190 (aggiunto al 19 il zero seguente) rimane l'eccesso 14, cui aggiunta la seguente nota 4, si fa 144, e questo deve dividersi per il doppio delle due note radicali 24, che saranno 48, e diviso quel 144 per 48, si trova essere per l'appunto il 3, onde si scrive nella lunetta la terza nota 3, e scritto da parte il 48 divisore, e messovi allato il tre quoziente, si averà 483, il quale moltiplicandosi per lo stesso 3 quoziente, diviene 1449, ed essendo ancora quel numero 144 con la seguente nota 9 ultima del proposto numero, uguale allo stesso 1449, sottratto questo da quello, nulla vi rimane, e però il numero 243 dovrà essere la vera radice quadra del proposto numero 59049. Il che dovea ritrovarsi.

285156
· · ·

285156	(534
25	
351	103 - 3
309	309
4256	
4256	1064 - 4
0000	4256

Dato parimente il numero 285156, volendo trovarne la radice quadra, si punteggiano li numeri 6, 1, e 8; indi cominciando dal 28 a considerare qual numero quadrato sia in esso si trova essere 25, la cui radice è 5, quale però scrivesi appresso la lunetta, ed avanzando 3 nel 28, si scrive il 3 con la nota seguente 5 di esso, che fa 35, e questo deve dividersi per 10, che è il doppio della nota radicale 5, e comprendendosi esso 10 tre volte nel 35, perciò nella lunetta scrivesi in secondo luogo il 3, e congiunto il 3 al divisore 10, che fa 103, si moltiplica per 3, e diviene 309; il che levandosi dal 351 (aggiunta al 35 la seguente nota 1 del proposto numero), ne avanza 42, cui aggiunta la seguente nota 5 del numero dato, si ha 425, che diviso per il doppio delle due note radicali 53, cioè per 106, ci si ritrova compreso 4 volte, però alla lunetta si aggiunge il 4, ed ancora si aggiunge al 106, onde riesce 1064, che moltiplicandosi per 4 da 4256, il che è lo stesso col resto del proposto numero, aggiungendo al 425 l'ultima nota 6; però del dato numero 285156 la vera radice è 534 ritrovata con questo metodo. 546820

```
546820          |739   699
 .  .  .        |     ----
49              |     1478
---             |___________
 568
 429             143 - 3
-----           ----
 13920          429
 13221
------           1469 - 9
   699          ------
                13221
```

Ecco un altro esempio, in cui si troverà la radice prossima, e non precisa. Sia il numero dato 546820. Avendolo punteggiato, si cerchi il massimo quadrato nelle prime note 54, che sarà 49, la cui radice è 7, che si scriverà dentro la lunetta, e sottraendo 49 da 54 rimane l'avanzo 5, cui aggiunta la seguente nota 6, sarà 56, da dividersi pel doppio di 7, cioè per 14, il che vi entrerebbe 4 volte perappunto, ma perchè se alli 14 ci si aggiungesse il 4, verrebbe 144, il quale moltiplicato per 4 riuscirebbe 576, che non potrebbe sottrarsi dal 568 (aggiunta al 56 l'altra nota 8 del proposto numero) perciò si scriva solamente il 3 in vece di 4, come nella terza regola fù avvisato, onde nella lunetta si aggiungerà il 3, e questo pure aggiunto al 14, si averà 143, che moltiplicato per 3, ci darà 429, e questo sottratto da 568 ne rimarrà 139, cui aggiunta l'altra nota del proposto numero, che è 2 (dopo l'8 al 56 aggiunto) sarà 1392, il che diviso col doppio di 73, cioè per 146, si vede, che ci entra 9 volte, onde si aggiunge 9 all'altre due note della lunetta; ed aggiunto ancora al medesimo divisore, riesce 1469, che moltiplicato per 9 di-

venta 13221, che dal 13920 (aggiunta l'ultima nota zero del proposto numero al 1392) sottraendosi, vi rimane per residuo 699, di cui si fa una frazione denominata dal doppio delle radici trovate 739, che sarà 1478; cioè tale frazione riuscirà $\frac{699}{1478}$ da aggiungersi alla suddetta radice 739; sarà però tale radice con quella frazione alquanto maggiore della vera, e se il denominatore di quella frazione si augumentasse d'una unità, facendo $\frac{699}{1479}$, riuscirebbe alquanto minore della radice vera (sebbene tale frazione potrebbe ridursi a $\frac{233}{493}$, dividendo per tre l'uno e l'altro numero, il superiore, e l'inferiore) onde la vera radice di 546820, che non si puo ritrovare espressa in note numerali, sarà di mezzo tra il $739\frac{699}{1478}$, e $739\frac{699}{1479}$; o pure dicasi tra il $739\frac{233}{492}$, ed il $739\frac{233}{493}$, delle quali una è alquanto maggiore, l' altra alquanto minore della sua esatta radice, che precisamente non può esprimersi, per non essere quel numero un vero quadrato.

Anzi per accostarsi meglio in infinito (per quanto si voglia) alla radice precisa, si potrebbe continuare l'operazione, aggiungendo all' ultimo avanzo 699, due, o quattro, o sei zeri, o quanti si volesse di numero pari; e continuando l' operazione come sopra, si troverebbero altre, ed altre note da aggiungersi alla radice per numeratori di un altra frazione, che sarà decimale per il denomi-

minatore, in cui sarà l' unità con tanti zeri, quante fossero le note ultimamente ritrovate, o pure dicasi, quante erano le coppie delle cifre aggiunte all' ultimo avanzo.

Per esempio, aggiungendo al 699 quattro coppie di zeri, si farà 69900000000, e continuando l' operazione si troverebbe da aggiungere alla radice delle note già determinate 739 queste altre quattro note 4728 denominate da 10000, cioè la frazione $\frac{4728}{10000}$ per cagione delle quattro coppie di zeri aggiunti al detto avanzo, il che si vede potersi continuare similmente in infinito; e detta radice, benchè maggiore alquanto della radice 739, è però minore della già trovata di sopra $739\frac{699}{1478}$, e maggiore dell' altra $739\frac{699}{1479}$, onde più si accosta alla radice esatta del proposto numero. Anzi quella frazione $\frac{4728}{10000}$ potrebbe ridursi in minori termini, dividendosi per 8 il numeratore, ed il denominatore, onde essa frazione si esprimerebbe per $\frac{591}{1250}$, che è uguale alla precedente $\frac{4728}{10000}$; e però la radice alquanto maggiore della precisa, sarà $739\frac{591}{1250}$, e la radice alquanto minore sarebbe $739\frac{591}{1251}$, anzi $739\frac{197}{417}$ uguale all' altra, dividendosi per 3 tanto il numeratore, quanto il denominatore di essi.

Sarà bene poi osservare, come si comprenda la

ſerie di tutti i quadrati per mezzo de' numeri diſpari 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 &c. mentre 1 è il quadrato dell' unità, cui ſi aggiunga il 3 ne rieſce 4, che è quadrato di 2; ed aggiuntovi pure 5, ſi fa 9 quadrato di 3, e ſimilmente al 9 aggiunto il 7, ſi fa 16 quadrato di 4, e così proſeguendo, ſi fanno tutti i quadrati coll' aggiunta de' proſſimi diſpari, come può vederſi nella ſeguente Tavola, in cui ſono le Radici, ed i loro Quadrati, e le Differenze di eſſi, che ſono i numeri diſpari, che aggiunti al proſſimo quadrato, ne fanno il ſeguente di mano in mano.

Tavola de' Quadrati.

Radici.	Quadrati.	Differenze.	Radici.	Quadrati.	Differenze.
1	1	1	19	361	37
2	4	3	20	400	39
3	9	5	21	441	41
4	16	7	22	484	43
5	25	9	23	529	45
6	36	11	24	576	47
7	49	13	25	625	49
8	64	15	26	676	51
9	81	17	27	729	53
10	100	19	28	784	55
11	121	21	29	841	57
12	144	23	30	900	59
13	169	25	31	961	61
14	196	27	32	1024	63
15	225	29	33	1089	65
16	256	31	34	1156	67
17	289	33	35	1225	69
18	324	35	36	1296	71

Radici.	*Quadrati.*	*Differenze.*	*Radici.*	*Quadrati.*	*Differenze.*
37	1369	73	69	4761	137
38	1444	75	70	4900	139
39	1521	77	71	5041	141
40	1600	79	72	5184	143
41	1681	81	73	5329	145
42	1764	83	74	5476	147
43	1849	85	75	5625	149
44	1936	87	76	5776	151
45	2025	89	77	5929	153
46	2116	91	78	6084	155
47	2209	93	79	6241	157
48	2304	95	80	6400	159
49	2401	97	81	6561	161
50	2500	99	82	6724	163
51	2601	101	83	6889	165
52	2704	103	84	7056	167
53	2809	105	85	7225	169
54	2916	107	86	7396	171
55	3025	109	87	7569	173
56	3136	111	88	7744	175
57	3249	113	89	7921	177
58	3364	115	90	8100	179
59	3481	117	91	8281	181
60	3600	119	92	8464	183
61	3721	121	93	8649	185
62	3844	123	94	8836	187
63	3969	125	95	9025	189
64	4096	127	96	9216	191
65	4225	129	97	9409	193
66	4356	131	98	9604	195
67	4489	133	99	9801	197
68	4624	135	100	10000	199

&c.

E così pure gli altri potrebbero similmente disporsi, ma parmi sia bene osservare ancora, quali siano i quadrati de' numeri composti con qualche frazione, e quali siano le loro differenze, se si prendono le loro radici aritmeticamente crescenti. Ne porterò quì alcune Tavole, che sarà bene il vederle, delle quali niun altro Autore ne ha discorso.

Tavola de' Quadrati de' numeri, con alcune frazioni aggiunte.

Radici.	Quadrati.	Differenze.	Radici.	Quadrati.	Differenze.
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$		$7\frac{1}{2}$	$56\frac{1}{4}$	
		4			16
$2\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$		$8\frac{1}{2}$	$72\frac{1}{4}$	
		6			18
$3\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$		$9\frac{1}{2}$	$90\frac{1}{4}$	
		8			20
$4\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{4}$		$10\frac{1}{2}$	$110\frac{1}{4}$	
		10			22
$5\frac{1}{2}$	$30\frac{1}{4}$		$11\frac{1}{2}$	$132\frac{1}{4}$	
		12			24
$6\frac{1}{2}$	$42\frac{1}{4}$		$12\frac{1}{2}$	$156\frac{1}{4}$	
		14	&c.	&c.	&c.

Ra-

Radici.	*Quadrati.*	*Differenze.*
$1\frac{1}{3}$	$1\frac{7}{9}$	$3\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{3}$	$5\frac{4}{9}$	$5\frac{2}{3}$
$3\frac{1}{3}$	$11\frac{1}{9}$	$7\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{3}$	$18\frac{7}{9}$	$9\frac{2}{3}$
$5\frac{1}{3}$	$28\frac{4}{9}$	$11\frac{2}{3}$
$6\frac{1}{3}$	$40\frac{1}{9}$	$13\frac{2}{3}$
$7\frac{1}{3}$	$53\frac{7}{9}$	$15\frac{2}{3}$
$8\frac{1}{3}$	$69\frac{4}{9}$	$17\frac{2}{3}$
$9\frac{1}{3}$	$87\frac{1}{9}$	$19\frac{2}{3}$
$10\frac{1}{3}$	$106\frac{7}{9}$	$21\frac{2}{3}$
$11\frac{1}{3}$	$128\frac{4}{9}$	$23\frac{2}{3}$
$12\frac{1}{3}$	$152\frac{1}{9}$	
&c.	&c.	&c.

Radici.	*Quadrati.*	*Differenze.*
$1\frac{1}{4}$	$1\frac{9}{16}$	$3\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{16}$	$5\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{4}$	$10\frac{9}{16}$	$7\frac{1}{2}$
$4\frac{1}{4}$	$18\frac{1}{16}$	$9\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{4}$	$27\frac{9}{16}$	$11\frac{1}{2}$
$6\frac{1}{4}$	$39\frac{1}{16}$	$13\frac{1}{2}$
$7\frac{1}{4}$	$52\frac{9}{16}$	$15\frac{1}{2}$
$8\frac{1}{4}$	$68\frac{1}{16}$	$17\frac{1}{2}$
$9\frac{1}{4}$	$85\frac{9}{16}$	$19\frac{1}{2}$
$10\frac{1}{4}$	$105\frac{1}{16}$	$21\frac{1}{2}$
$11\frac{1}{4}$	$126\frac{9}{16}$	$23\frac{1}{2}$
$12\frac{1}{4}$	$150\frac{1}{16}$	
&c.	&c.	&c.

Radici.	*Quadrati.*	*Differenze.*
$1\frac{1}{5}$	$1\frac{11}{25}$	$3\frac{2}{5}$
$2\frac{1}{5}$	$4\frac{21}{25}$	$5\frac{2}{5}$
$3\frac{1}{5}$	$10\frac{6}{25}$	$7\frac{2}{5}$
$4\frac{1}{5}$	$17\frac{16}{25}$	$9\frac{2}{5}$
$5\frac{1}{5}$	$27\frac{1}{25}$	$11\frac{2}{5}$
$6\frac{1}{5}$	$38\frac{11}{25}$	$13\frac{2}{5}$

Radici.	*Quadrati.*	*Differenze.*
$7\frac{1}{5}$	$51\frac{21}{25}$	$15\frac{2}{5}$
$8\frac{1}{5}$	$67\frac{6}{25}$	$17\frac{2}{5}$
$9\frac{1}{5}$	$84\frac{16}{25}$	$19\frac{2}{5}$
$10\frac{1}{5}$	$104\frac{1}{25}$	$21\frac{2}{5}$
$11\frac{1}{5}$	$125\frac{11}{25}$	$23\frac{2}{5}$
$12\frac{1}{5}$	$148\frac{21}{25}$	
&c.	&c.	&c.

Radici.	Quadrati,	Differenze.	Radici,	Quadrati.	Differenze.
$1\frac{1}{6}$	$1\frac{13}{36}$	$3\frac{1}{3}$	$7\frac{1}{6}$	$51\frac{13}{36}$	$15\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{6}$	$4\frac{25}{36}$	$5\frac{1}{3}$	$8\frac{1}{6}$	$66\frac{25}{36}$	$17\frac{1}{3}$
$3\frac{1}{6}$	$10\frac{1}{36}$	$7\frac{1}{3}$	$9\frac{1}{6}$	$84\frac{1}{36}$	$19\frac{1}{3}$
$4\frac{1}{6}$	$17\frac{13}{36}$	$9\frac{1}{3}$	$10\frac{1}{6}$	$103\frac{13}{36}$	$21\frac{1}{3}$
$5\frac{1}{6}$	$26\frac{25}{36}$	$11\frac{1}{3}$	$11\frac{1}{6}$	$124\frac{25}{36}$	$23\frac{1}{3}$
$6\frac{1}{6}$	$38\frac{1}{36}$	$13\frac{1}{3}$	$12\frac{1}{6}$	$148\frac{1}{36}$	
			&c.	&c.	&c.

E così facilmente si potranno fare gli altri quadrati, le cui radici numeriche siano composte di altre frazioni, e le cui differenze possano competerci. In quest' ultima tavola, la radice $2\frac{1}{6}$, facendosi del quadrato $4\frac{25}{36}$, mostra che tale suo quadrato è uguale al quadrato di 2 (che è 4) ed al quadrato della frazione $\frac{5}{6}$ (il cui quadrato è pure $\frac{25}{36}$) il che ho gusto si osservi.

CAPITOLO X.

Del cavare la Radice cubica di un numero.

MOltiplicandosi qualunque quadrato per la sua radice quadra, ne riesce il *Cubo*, di cui quella stessa radice dirassi *Cubica*; però si cerca, come possa trovarsi la cubica radice di qualsivoglia numero proposto, il quale se non è propriamente cubo, non potrà avere una esatta radice cubica; ma solamente qualcheduna alquanto prossima, con una frazione aggiuntavi. Conviene però os-

osservare i cubi delle prime note numeriche nella seguente Tavola, in cui sono posti ancora i loro quadrati.

Radici.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrati.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubi.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Nel dato numero da cavarsi la radice cubica si punteggia l' ultima nota, e procedendo avanti verso la sinistra, si lasciano due note libere, e l' altra si punteggia, indi se vi sono altre due note, si lasciano libere, e l' altra punteggiasi, e così sempre. Per esempio sia proposto il numero 82312875. Si punteggia l' ultima nota 5, e passate l'altre due precedenti 7, e 8, si fa il punto sotto il 2, e passate l' altre due note 1 e 3, si punteggia la seguente nota, che pure è un 2, come si vede nella seguente dimostrazione.

Quì la lettera *R* significa la Radice.

La lettera *Q* il Quadrato.

La lettera *C* il Cubo.

Il segno X tra due numeri, importa la moltiplicazione di uno nell' altro.

Il segno = mostra l' ugualità de prodotti di quei numeri nell' altro.

Il segno + importa la somma.

82312875

82|312|875	(435
64	
183	R. 4
144	Q. 16
3912	C. 64
1107	
28058	$4\times4=16\times3=48$
27735	
32375	$3\times3=9\times3=27\times4=1080+27=1107$
32375	
00000	$43\times43=1849\times3=5547$

$$5\times5=25\times3=75\times43=32250+125=32375$$

Indi si considerino le prime note al punto verso sinistra, cioè 82, e si cerchi il massimo cubo ivi compreso, che sarebbe 64, onde la sua radice cubica 4 si scriva dopo la lunetta, e sottratto il 64 da 82, vi rimane 18, a cui aggiunta la seguente nota 3 del numero proposto, ne risulta 183, cui deve compararsi il triplo del quadrato di quella radice 4, il cui quadrato essendo 16, triplicato si fa 48, e si considera quante volte questo si contenga in quello 183, e trovandosi, che ci stia tre volte, che sarebbe 144, però nella lunula scrivasi la stessa nota 3 appresso l'altra 4, indi preso l'eccesso di 183 sopra il 144, che è 39, vi si aggiungano l'altre due note 12 del proposto numero, onde riuscirà 3912. Quindi preso il quadrato della seconda radicale nota 3, che è 9 si triplichi, che diven-

venterà 27, e ciò ſi moltiplichi per l' antecedente nota radicale 4, che ſi farà 108, e gli ſi aggiunga uno zero, ſicchè diventi 1080, indi preſo il cubo di quella nota 3, che pure è 27, ſommato queſto con quello, diventa 1107; e ciò ſi ſottragga dal numero ſuperiore 3912, e ci reſta 2805, cui poſcia aggiungaſi la nota 8 del propoſto numero, che diventerà 28058 (ſe però foſſe riuſcito maggiore quel numero 1107 dell' altro 3912, onde non ſi foſſe potuto ſottrarre quello da queſto, come ſi vedrà in un altro eſempio, ſi ſarebbe dovuta diminuire la ſeconda nota radicale, computando in quel primo eccesſo il triplo del quadrato della prima nota radicale, come ci ſi conteneſſe meno volte). Quindi quadrando il numero delle due note radicali 43, che ſarà 1849, e triplicandolo, che riuſcirà 5547, partaſi da queſto quel numero 28058, e ſi vedrà entrarci cinque volte, perchè moltiplicato quello per 5 diventa 27735, perciò ſegnaſi la nota 5 nella lunula al terzo luogo; e ſottratto 27735 da 28058, ne rimane 323, cui ſi aggiungano l' altre due note 75 del propoſto numero, e diventerà l' avanzo 32375, indi preſo il quadrato di quella terza nota 5, che è il 25, e triplicatolo, ſi fa 75, e moltiplicato per le altre antecedenti note radicali 43, diventa 3225, a cui ſi aggiunga un zero, e ſarà 32250; e preſo poi il cubo della medeſima nota 5, che è 125, ſi faccia inſieme la ſomma di queſto, e di quello, e diventerà quindi 32375; il che eſſendo uguale a quell' ultimo ſuo avanzo, è manifeſto eſſere 435 la preciſa Radice cubica del propoſto numero 82312875.

Ma

Ma ſe queſto avanzo foſſe ritrovato minore di quella ſomma, ſi dovrebbe diminuire la nota ultimamente trovata (come ſi è detto di ſopra) ſe poi foſſe maggiore il ſuo eceſſo, ſi farebbe numeratore di una frazione denominata da un numero triplo della ſomma della trovata radice, e del ſuo quadrato, la quale frazione inſieme con eſſa radice ſarebbe proſſimamente maggiore, o minore della vera; e quando il propoſto numero ſi accreſceſſe con triplicati zeri, gli ſi aggiungerebbe un altra frazione, col denominatore della radice cubica di que' milleſimi aggiunti, come al di ſotto potrà darſene l' eſempio.

52658	($37\frac{2005}{4218}$
27	
256	
189	$3 \times 3 = 9 \times 3 = 27$
6758	
4753	$7 \times 7 = 49 \times 3 = 147 \times 3 = 4410 + 343 = 4753$
2005	$37 \times 3 = 111$
	$37 \times 37 = 1369 \times 3 = 4107$
	$111 + 4107 = 4218$

Eſſendoſi però dato il numero 52658, di cui ſi cerchi la radice cubica, punteggiatolo nelle note 8, e 2, ſi cercherà il maſſimo cubo nelle prime note 52, che ſi vedrà eſſere il 27, la cui radice cubica è il 3, la quale ſcrivaſi dopo la lunetta;

ta; e ſottratto il 27 da 52, rimane 25, cui aggiunta la proſſima nota 6, ne rieſce 256, in cui oſſervando, quante volte ci entri il triplo di 9 quadrato di 3, che ſarà pure 27, ſi trova, che ci entrerebbe 9 volte, facendo 243; ma queſto è troppo, perchè fatto l' altro calcolo, ſarebbe il ſeguente eccesſo minore di eſſo; ed ancora entrandovi 8 volte nel 256 ſarebbe ancora troppo; però ſi pigli 7 volte, che fa 189, il che da 256 levato, ne rimane 67, cui ſi aggiungano l' altre due note, e diventerà 6758; indi poſta eſſa nota 7 nella lunetta, il ſuo quadrato 49 ſi triplichi, e ſarà 147, e moltiplicato per la prima nota radicale 3, rieſce 441, cui aggiunto uno zero ſi fa 4410, ed aggiuntovi il cubo di 7, che è 343, ſi ha 4753, e queſto ſottratto da quell' avanzo 6758, ne rimane 2005, il che ſi ponga appreſſo le radici cubiche 37 per numeratore della frazione, cui ſottopongaſi per denominatore il triplo della radice trovata, e del ſuo quadrato; onde eſſendo il triplo di 37 queſto numero 111, ed il di lui quadrato 1369, triplicato diviene 4107, l'uno e l'altro farà 4218, che ſarà il denominatore della frazione; ſicchè la proſſima radice (ma però alquanto minore della vera riſpetto al propoſto numero 52658, ſarà 37 $\frac{2005}{4218}$; il che dovea determinarſi.

Più eſattamente però ſi troverebbe la frazione da aggiungerſi alla radice ritrovata, ſe al numero dato ſi aggiungeſſero alquanti tripli di zero, e ſeguitando il calcolo ſi troverebbero altre note radicali, che preſe per numeratore, gli ſi ſottoporrebbe per denominatore l'unità, con la terza

parte degli zeri, che si erano aggiunti al proposto numero. Come per esempio essendovi il numero 29160, aggiuntivi due ternarj di zero, si troverà la radice di tutto

2916000000
29160 (3077
$30\frac{77}{100}$

quel numero 3077, e perchè sempre sono tante note radicali, quanti sono li punti addottivi, essendo però solamente due al primo numero proposto, si pigliano le prime due note radicali 30, e l'altre due seguenti, per gli zeri aggiunti, lascianfi per numeratore 77 della frazione, che averà poi per denominatore l'unità, con due zeri aggiuntivi; sicchè la più prossima radice cubica di 29160 sarà $30\frac{77}{100}$ alquanto però minore della sua precisa; ed accrescendo di una unità esso numeratore, cioè facendo $30\frac{78}{100}$ riuscirebbe prossimamente maggiore della sua esatta radice cubica, la quale non si può mai esprimere precisamente con le note numeriche, ma secondo che si aggiungano al dato numero più tripli di zero, si farà la radice sempre più prossima alla sua precisa.

Bisogna finalmente osservare, come la serie de' Cubi si comprenda pure da' numeri dispari, ma con la somma di tanti, quante sono le unità di sua radice cubica, cioè in questa maniera; il primo cubo di 1 è pure 1, il cubo secondo, la cui radice è 2, si comprende dalli due susseguenti numeri dispari 3 e 5, che fanno il cubo 8, il terzo cubo della radice 3 si compone pure dalli tre seguenti dispari, che sono 7, 9, ed 11, li quali fanno il cubo 27, e così altri quattro dispari 13, 15, 17,

e 19

e 19 fanno il quarto cubo 64, la cui radice è 4, e così susseguentemente, come può vedersi in questa Tavola di poche radici e cubi addotta, ma che si potrebbe in oltre continuare nella stessa maniera.

Radici.	*Cubi.*	*Dispari, uguali al Cubo.*
1	1	1
2	8	3 5
3	27	7 9 11
4	64	13 15 17 19
5	125	21 23 25 27 29
6	216	31 33 35 37 39 41
7	343	43 45 47 49 51 53 55
&c.	&c.	&c.

Ne aggiungerò un altra alquanto maggiore, in cui si vede, oltre le radici ed i cubi, le loro due differenze, delle quali l' ultima è composta di numeri aritmetici, la cui differenza è sempre il sei; onde è fatta di 6, 12, 18, 24, 30 &c.

Radici.	*Cubi.*	*Differenza 1.*	*Differenza 2.*
0	0		
		1	
1	1		6
		7	
2	8		12
		19	
3	27		18
		37	
4	64		24
		61	
5	125		30

Radici.	*Cubi.*	*Differenza* 1.	*Differenza* 2.
6	216	91	36
7	343	127	42
8	512	169	48
9	729	217	54
10	1000	271	60
11	1331	331	66
12	1728	397	72
13	2197	469	78
14	2744	547	84
15	3375	631	90
16	4096	721	96
17	4913	817	102
18	5832	919	108
19	6859	1027	114
20	8000	1141	120
21	9261	1261	126
22	10648	1387	132
23	12167	1519	138
		1657	

Radici.	*Cubi.*	*Differenza 1.*	*Differenza 2.*
24	13824	1801	144
25	15625	1951	150
26	17576	2107	156
27	19683	2269	162
28	21952	2437	168
29	24389	2611	174
30	27000	2791	180
31	29791	2977	186
32	32768	3169	192
33	35937	3367	198
34	39304	3571	204
35	42875	3781	210
36	46656	3997	216
37	50653	4219	222
38	54872	4447	228
39	59319	4681	234
40	64000	4921	240
41	68921	5167	246

Radici.	Cubi.	Differenza 1.	Differenza 2.
42	74088		252
		5419	
43	79507		258
		5677	
44	85184		264
		5941	
45	91125		270
		6211	
46	97336		276
		6487	
47	103823		282
		6769	
48	110592		288
		7057	
49	117649		294
		7351	
50	125000		300
		7651	
51	132651		306
		7957	
52	140608		312
		8269	
53	148877		318
		8587	
54	157464		324
		8911	
55	166375		330
		9241	
56	175616		336
		9577	
57	185193		342
		9919	
58	195112		348
		10267	
59	205379		354
		10621	

Radici.	*Cubi.*	*Differenza 1.*	*Differenza 2.*
60	216000	10981	360
61	226981	11347	366
62	238328	11719	372
63	250047	12097	378
64	262144	12481	384
65	274625	12871	390
66	287496	13267	396
67	300763	13669	402
68	314432	14077	408
69	328509	14491	414
70	343000	14911	420
71	357911	15337	426
72	373248	15769	432
73	389017	16207	438
74	405224	16551	444
75	421875	17101	450
76	438976	17557	456
77	456533	18019	462

Radici.	*Quadrati.*	*Differenza 1.*	*Differenza 2.*
78	474552	18487	468
79	493039	18961	474
80	512000	19441	480
81	531441	19927	486
82	551368	20419	492
83	571787	20917	498
84	592704	21421	504
85	614125	21931	510
86	636056	22447	516
87	658503	22969	522
88	681472	23497	528
89	704969	24031	534
90	729000	24571	540
91	753571	25117	546
92	778688	25669	552
93	804357	26227	558
94	830584	26791	564
95	857375	27361	5[illegible]

Radici.	*Quadrati.*	*Differenza 1.*	*Differenza 2.*
96	884736		576
		27937	
97	912673		582
		28519	
98	941192		588
		29107	
99	970299		594
		29701	
100	1000000		600
&c.	&c.	&c.	&c.

Ancora le radici si pigliano aritmeticamente, ma congiuntavi una stessa frazione, i Cubi di esse parimente hanno le due differenze, di cui le seconde parimente tra loro differiscono dello stesso numero 6, come si vedrà nelle seguenti brevi Tavole.

Ra-

Radici.	*Cubi.*	*Differenze prime.*	*Differenze seconde.*	*Differenze ultime.*
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{8}$	$12\frac{1}{4}$	15	6
$2\frac{1}{2}$	$15\frac{5}{8}$	$27\frac{1}{4}$	21	6
$3\frac{1}{2}$	$42\frac{7}{8}$	$48\frac{1}{4}$	27	6
$4\frac{1}{2}$	$91\frac{1}{8}$	$75\frac{1}{4}$	33	6
$5\frac{1}{2}$	$166\frac{3}{8}$	$108\frac{1}{4}$	39	6
$6\frac{1}{2}$	$274\frac{5}{8}$	$147\frac{1}{4}$	45	6
$7\frac{1}{2}$	$421\frac{7}{8}$	$192\frac{1}{4}$	51	6
$8\frac{1}{2}$	$614\frac{1}{8}$	$243\frac{1}{4}$	57	
$9\frac{1}{2}$	$857\frac{3}{8}$	$300\frac{1}{4}$		
$10\frac{1}{2}$	$1157\frac{5}{8}$			
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Ra-

Radici.	Cubi.	Differenze prime.	Differenze seconde.	Differenze ultime.
$1\frac{1}{3}$	$2\frac{10}{27}$			
$2\frac{1}{3}$	$12\frac{19}{27}$	$10\frac{1}{3}$		
$3\frac{1}{3}$	$37\frac{1}{27}$	$24\frac{1}{3}$	14	
$4\frac{1}{3}$	$81\frac{10}{27}$	$44\frac{1}{3}$	20	6
$5\frac{1}{3}$	$157\frac{19}{27}$	$70\frac{1}{3}$	26	6
$6\frac{1}{3}$	$254\frac{1}{27}$	$102\frac{1}{3}$	32	6
$7\frac{1}{3}$	$394\frac{10}{27}$	$140\frac{1}{3}$	38	6
$8\frac{1}{3}$	$578\frac{19}{27}$	$184\frac{1}{3}$	44	6
$9\frac{1}{3}$	$813\frac{1}{27}$	$234\frac{1}{3}$	50	6
$10\frac{1}{3}$	$1103\frac{10}{27}$	$290\frac{1}{3}$	56	6
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Ra-

Radici.	*Cubi.*	*Differenze prime.*	*Differenze seconde.*	*Differenze ultime.*
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{8}$			
$2\frac{1}{2}$	$15\frac{5}{8}$	$12\frac{1}{4}$		
$3\frac{1}{2}$	$42\frac{7}{8}$	$27\frac{1}{4}$	15	
$4\frac{1}{2}$	$91\frac{1}{8}$	$48\frac{1}{4}$	21	6
$5\frac{1}{2}$	$166\frac{3}{8}$	$75\frac{1}{4}$	27	6
$6\frac{1}{2}$	$274\frac{5}{8}$	$108\frac{1}{4}$	33	6
$7\frac{1}{2}$	$421\frac{7}{8}$	$147\frac{1}{4}$	39	6
$8\frac{1}{2}$	$614\frac{1}{8}$	$192\frac{1}{4}$	45	6
$9\frac{1}{2}$	$857\frac{3}{8}$	$243\frac{1}{4}$	51	6
$10\frac{1}{2}$	$1157\frac{5}{8}$	$300\frac{1}{4}$	57	6
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Ra-

Radici.	*Cubi.*	*Differenze prime.*	*Differenze seconde.*	*Differenze ultime.*
$1\frac{1}{3}$	$2\frac{10}{27}$			
		$10\frac{1}{3}$		
$2\frac{1}{3}$	$12\frac{19}{27}$		14	
		$24\frac{1}{3}$		6
$3\frac{1}{3}$	$37\frac{1}{27}$		20	
		$44\frac{1}{3}$		6
$4\frac{1}{3}$	$81\frac{10}{27}$		26	
		$70\frac{1}{3}$		6
$5\frac{1}{3}$	$158\frac{19}{27}$		32	
		$102\frac{1}{3}$		6
$6\frac{1}{3}$	$254\frac{1}{27}$		38	
		$140\frac{1}{3}$		6
$7\frac{1}{3}$	$394\frac{10}{27}$		44	
		$184\frac{1}{3}$		6
$8\frac{1}{3}$	$578\frac{19}{27}$		50	
		$234\frac{1}{3}$		6
$9\frac{1}{3}$	$813\frac{1}{27}$		56	
		$290\frac{1}{3}$		
$10\frac{1}{3}$	$1103\frac{10}{27}$			
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Ra-

Radici.	*Cubi.*	*Differenze prime.*	*Differenze seconde.*	*Differenze ultime.*
$1\frac{2}{3}$	$4\frac{17}{27}$	$14\frac{1}{3}$	16	6
$2\frac{2}{3}$	$18\frac{26}{27}$	$30\frac{1}{3}$	22	6
$3\frac{2}{3}$	$49\frac{8}{27}$	$52\frac{1}{3}$	28	6
$4\frac{2}{3}$	$101\frac{17}{27}$	$80\frac{1}{3}$	34	6
$5\frac{2}{3}$	$181\frac{26}{27}$	$114\frac{1}{3}$	40	6
$6\frac{2}{3}$	$296\frac{8}{27}$	$154\frac{1}{3}$	46	6
$7\frac{2}{3}$	$450\frac{17}{27}$	$200\frac{1}{3}$	52	6
$8\frac{2}{3}$	$650\frac{26}{27}$	$252\frac{1}{3}$	58	&c.
$9\frac{2}{3}$	$903\frac{8}{27}$	$310\frac{1}{3}$	&c.	
$10\frac{2}{3}$	$1233\frac{17}{27}$	&c.		
&c.	&c.			

CA-

CAPITOLO XI.

De' numeri rotti, che ſono le Frazioni.

AVendo diſcorſo di ſopra delle Frazioni, che talvolta ſi aggiungono al quoziente della diviſione, e alle radici quadrate, o cubiche di un numero non eſattamente quadrato ne cubico, ed ancora a' quadrati, ed a' cubi eſattamente fatti da tali radici compoſte di numero intiero e di un rotto, ed ancora le loro differenze talvolta ſi veggono avere aggiunte delle frazioni. Ora biſogna per maggior chiarezza vedere più particolarmente, che coſa ſiano tali frazioni o numeri rotti, e come ſi maneggino nel calcolarli, perchè ſovente accade di doverli ſommare, o ſottrarre, o moltiplicare, o dividere; dal che potrà oſſervarſi, come ſiano fatte le già eſpreſſe nelle Tavole precedenti.

La frazione eſſendo compoſta di due numeri intercetti tra una retta linea traſverſale, per cui ſeparaſi il ſuperiore (che diceſi *Numeratore*) dall' inferiore (che è detto *Denominatore*) deve ſempre avere quell' inferior numero maggiore dell' altro, che è al di ſopra; imperocchè quello denomina alquante parti delle unità, da queſt' altro enumerate, e non può farſi un numero intero con tali frazioni; però ſe il denominatore foſſe uguale al numeratore, per eſempio $\frac{3}{3}$, o $\frac{7}{7}$, o $\frac{15}{15}$ ſignificherebbero una ſemplice unità, che tanto ſono tre terzi, quanto ſette ſetteſimi, o quindici quindiceſimi, e ſe foſſe minore il denominatore del

del ſuo numeratore, importerebbe qualche numero, come ſe fuſſe duplo, o triplo, o quadruplo &c. quello di queſto, ne importerebbe il 2, o pure il 3, o il 4, per eſempio $\frac{14}{7}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{12}{3}$ &c. eſpongono quello il due, l' altro il tre, e l' ultimo il quattro, e così gli altri: ma ſe non foſſe il numeratore ugualmente molteplice del denominatore, di cui però ſia maggiore, converrà rimettere tale frazione ad un numero, con un altra frazione particolare; per eſempio $\frac{23}{5}$ è uguale a 4 e $\frac{3}{5}$, perchè il 5 entra 4 volte nel 20, e ne avanza il 3; ſimilmente $\frac{243}{34}$ è uguale a 7 $\frac{5}{34}$, perchè 34 via 7 fa 238, e ne avanza 5 per giungere al 243.

Se il numeratore, ed il denominatore foſſero diviſibili pel medeſimo numero, potrebbe la frazione ridurſi in numeri minori; per eſempio $\frac{423}{912}$, in cui può dividerſi per 3 tanto il ſuperiore, che ridurrebbeſi in 141, quanto l' inferiore, che riduceſi in 304, ſi doverà ridurre a queſt' altra frazione $\frac{141}{304}$; così pure la frazione $\frac{644}{1012}$ potendoſi dividere per 4 ambidue li ſuoi numeri, dovrà ridurſi a $\frac{161}{253}$, anzi però queſto numeratore 161, dividendoſi per 23 in 7, ed il denominatore 253 altresì dividendoſi per 23 in 11, potrà farſi più piccola eſſa frazione, in $\frac{7}{11}$, che è la ſteſſa con la prima $\frac{644}{1012}$, eſſendo così diviſo l' uno e l' altro numero per 92.

Alle volte però conviene ridurre alcune diverſe frazioni di denominatore diverſo, ed altre loro uguali denominate da uno ſteſſo numero, per eſempio; ſiano eſpoſte le frazioni $\frac{3}{5}$, e $\frac{4}{7}$, ſi moltiplichi alternatamente il numeratore dell' una col denominatore dell' altra, cioè 3 via 7 fa 21, e

4 via 5

4 via 5 fa 20, e queſti prodotti diventino li numeratori di due altre frazioni, il di cui denominatore ſia poi il prodotto di ambi li primi denominatori, cioè 5 via 7, che fa 35, però le due propoſte frazioni ſi ſaranno ridotte a queſte due altre $\frac{21}{35}$, e $\frac{20}{35}$, equivalenti alle prime due, con queſt' altro medeſimo denominatore di ciaſcheduna 35; eſſendo i numeri della prima $\frac{3}{5}$ moltiplicati per 7, onde rieſce $\frac{21}{35}$, ed i numeratori della ſeconda $\frac{4}{7}$ moltiplicati per 5, onde rieſce $\frac{20}{35}$.

Occorrendo poi ſommare inſieme più frazioni ridotte come ſopra ad un medeſimo denominatore, baſta ſommare i loro numeratori, ed in uno ridurli; così per ſommare $\frac{3}{5}$ con $\frac{4}{7}$, primieramente riduconſi alle altre due loro uguali $\frac{21}{35}$, e $\frac{20}{35}$, poi ſi ſommano inſieme i loro numeratori 21, e 20, che fanno 41, onde ne rieſce la ſomma di ambidue uguale a $\frac{4}{35}$, che però riuſcendo il numeratore maggiore del denominatore, ſi ſottragga 35 da 41, che entrandovi una volta ſola, con l'avanzo di 6, ſarà la ſomma di quelle due frazioni uguale ad 1 $\frac{6}{35}$, cioè uguale ad una unità, e ſei parti trigeſimequinte.

Ma volendo ſottrarre una frazione dall' altra, come il $\frac{4}{7}$ da $\frac{3}{5}$, ridotte alla ſteſſa denominazione $\frac{20}{35}$, e $\frac{21}{35}$, ſi vede, che ſottraendo il numeratore di quella dal numeratore di queſta, ne rimane per reſiduo $\frac{1}{35}$, onde ſi ha che $\frac{1}{35}$ con $\frac{20}{35}$ eſſendo uguale a $\frac{21}{35}$, perciò l' $\frac{1}{35}$ con $\frac{4}{7}$, è a $\frac{3}{5}$ uguale.

Se poi ci occorre moltiplicare una frazione con qualche numero intero, o con un altra frazione, baſta nel primo caſo moltiplicare il numeratore con l' altro numero, e ritenere la ſteſ-

ſa

sa denominazione; per esempio, volendo moltiplicare $\frac{3}{7}$ per 2 ne riuscirà quest' altra frazione $\frac{6}{7}$; ma volendo quella prima moltiplicare per 5, ne riuscirebbe 5 via 3 uguale a 15, cioè $\frac{15}{7}$, ove riuscendo maggiore il numeratore del denominatore, si può ridurre a 2 $\frac{1}{7}$, perchè il 7 è la metà di 14, onde nel 15 vi entra due volte, con l'unità di più; che se si volesse moltiplicare $\frac{3}{4}$ per il numero 8, diventerebbe $\frac{24}{4}$, il che può ridursi all' intero numero 6, perchè sei volte entra il 4 nel 24. Ma pure se si vorrà moltiplicare una frazione in un altra, per esempio $\frac{3}{4}$ in $\frac{7}{11}$, si deve moltiplicare insieme, non solo i numeratori, ma ancora i denominatori, con che si fa un altra frazione, perchè 3 via 7 fa 21, e 4 via 11 fa 44, onde moltiplicati $\frac{3}{4}$ in $\frac{7}{11}$, riesce $\frac{21}{44}$; e similmente, moltiplicando insieme $\frac{5}{6}$ e $\frac{13}{30}$, ne riesce $\frac{65}{180}$, i quali numeri potendosi dividere ambidue per 5, ne riesce il prodotto $\frac{13}{36}$.

Alle volte si potrà fare la divisione di una frazione per un numero assoiuto, o per un altra frazione; quanto alla prima operazione, basta moltiplicare il denominatore per quel numero dato; per esempio, si voglia dividere $\frac{3}{5}$ per 8; si moltiplichi per 8 il denominatore 5, che diventerà 40, e la frazione $\frac{3}{40}$ sarà il quoziente di tale divisione. Se però il numeratore della frazione dividenda si potesse intieramente dividere pel numero dato, basterebbe dividerne il numeratore, e lasciare il denominatore come prima. Per esempio, volendo dividere la frazione $\frac{6}{13}$ per 2, basta dividere il 6 per 2, che riesce 3, onde il quoziente sarà $\frac{3}{13}$; ma volendo dividere una fra-

zio-

zione per un altra, come sarebbe $\frac{3}{5}$ per $\frac{7}{11}$, si moltiplichi il numeratore del primo col denominatore del secondo, cioè 3 via 11, che farà 33, e questo si ponga per numeratore del quoziente, indi moltiplicato il numeratore del secondo col denominatore del primo, cioè 7 via 5, che fa 35, si ponga questo per denominatore del quoziente, che sarà $\frac{33}{35}$, e così sarà fatta la divisione della prima frazione per la seconda. Si potrebbero ancora rivoltare i numeri della frazione dividente, e così riposta moltiplicarla con l' altra; per esempio, volendo dividere $\frac{3}{5}$ per $\frac{7}{11}$, si rimetta di sopra l' 11, e di sotto il 7, riuscendo $\frac{11}{7}$, il che moltiplicato per l' altra frazione $\frac{3}{5}$, riuscirà $\frac{33}{35}$, come divisione di $\frac{3}{5}$ per $\frac{7}{11}$.

Si osservi, che la moltiplicazione de' numeri interi rende il prodotto maggiore, e la divisione dell' uno per l' altro rende il quoziente minore, ma al contrario la moltiplicazione delle frazioni rende il prodotto minore, e la loro divisione fa il quoziente maggiore, mentre si è veduto, che moltiplicando $\frac{3}{4}$ in $\frac{7}{11}$ riesce $\frac{21}{44}$, il che è minore tanto dell' uno, quanto dell' altro, perchè $\frac{3}{4}$ è uguale a $\frac{33}{44}$, e $\frac{7}{11}$ uguaglia il $\frac{28}{44}$, di ciascuno de' quali è minore il $\frac{21}{44}$; ma dividendo $\frac{3}{5}$ per $\frac{7}{11}$, ne riesce il quoziente $\frac{33}{35}$, che è maggiore di ciascuna di tali frazioni, che si potrebbero ridurre col medesimo denominatore, cioè $\frac{3}{5}$ uguale a $\frac{21}{35}$, e $\frac{7}{11}$ a $\frac{21}{33}$, o pure a $\frac{22}{35}$ con $\frac{1}{385}$: onde di ciascuno di essi è maggiore il quoziente $\frac{33}{35}$: e se viceversa si fosse diviso il $\frac{7}{11}$ per $\frac{3}{5}$, sarebbe riuscito per quoziente a roverscio il $\frac{35}{33}$, che è maggiore dell' unità, cioè uguale ad 1 $\frac{2}{33}$; siccome ancora dividen-

 do

do $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{8}$, si farebbe $\frac{24}{4}$, che è un intero uguale a 6.

La ragione sì è, perchè essendo i numeri interi composti di unità, e le semplici frazioni minori di essa, come che il prodotto della moltiplicazione deve contenere tante volte uno de' numeri moltiplicati, quante volte l' altro contiene l' unità, perciò ne' numeri interi riesce il prodotto maggiore, come moltiplicati insieme il 3 e il 7, fanno 21, che tante volte contiene il 7, quante volte il 3 contiene l' unità; ma nelle frazioni $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{11}$, se il prodotto $\frac{21}{55}$ deve contenere tante volte una di esse $\frac{3}{5}$ quante volte l' altra $\frac{7}{11}$ contiene l' unità, mentre questa è minore dell' unità, così pure esso prodotto $\frac{21}{55}$ deve meno contenere essa frazione moltiplicata $\frac{3}{5}$, e così pure essere minore dell' altra $\frac{7}{11}$, perchè ancora $\frac{3}{5}$ è minore dell' unità. Viceversa nella divisione, il quoziente deve contenersi tante volte nel dividendo, quante volte si contiene l' unità nel divisore, e però ne' numeri interi, siccome l' unità è minore del divisore (non potendosi dividere cosa alcuna per l' unità, ma per il numero maggiore di essa) così il quoziente è minore del dividendo; per esempio, il 21 diviso per 7 fa il quoziente 3, che tanto si contiene in 21, quanto si contiene l' unità in 7, ed è altrettanto minore il 3 di 21, come l' unità è minore di 7, ma nelle frazioni, deve il quoziente essere maggiore della frazione da dividersi, come pure l' unità è maggiore dell' altra frazione dividente; così diviso $\frac{4}{7}$ per $\frac{3}{5}$, ne riesce $\frac{20}{21}$, che tanto è maggiore di $\frac{4}{7}$ (cioè di $\frac{12}{21}$, che è lo stesso, moltipli-

tiplicati per 3 ambi i numeri ſuperiore ed inferiore) come il 5 è maggiore di 3 (eſſendo 5 a 3, come 20 a 12), cioè come l'unità (uguale a $\frac{5}{5}$) è maggiore di $\frac{3}{5}$.

Circa il cavare la radice quadra o cubica da una frazione, ſe il numeratore ed il denominatore ſono quadrati, le loro radici quadre ne fanno la ricercata quadra radice, come ſe ſi vuole la radice quadra di $\frac{9}{25}$, ſi trova eſſere $\frac{3}{5}$, perchè ciò moltiplicato in ſe ſteſſo fa il $\frac{9}{25}$, e ſe tanto il numeratore quanto il denominatore foſſero cubi, la radice cubica di tale frazione ſi eſpone con le radici cubiche del ſuperiore e dell' inferiore; per eſempio, eſſendo la frazione $\frac{27}{343}$, la ſua radice cubica ſarà $\frac{3}{7}$, eſſendo il 3 radice cuba di 27, ed il 7 radice cuba di 343. Se poi foſſe il quadrato, o il cubo ſolamente in uno di que' numeri della frazione, cioè nel numeratore o nel denominatore, come ſarebbe $\frac{9}{23}$, ò $\frac{17}{100}$, o pure $\frac{27}{74}$, ò $\frac{43}{216}$, non ſi potrebbe farne l' eſatta radice, ma in quelle due prime ſi eſporrebbe la radice quadra in queſta maniera $\frac{3}{\sqrt{23}}$ e $\frac{\sqrt{17}}{10}$; e nelle altre due la radice cubica ſarebbe $\frac{3}{\sqrt[3]{74}}$, e $\frac{\sqrt[3]{43}}{6}$, ponendo la vera radice di que' numeri quadrati o cubi, ed eſponendo la radice quadra del numero non quadrato col ſegno $\sqrt{..}$, e la radice cuba di quello che non è cubico, col ſegno $\sqrt[3]{..}$; ſe poi neſſuno di quei numeri foſſe quadrato, come $\frac{3}{7}$, la ſua quadra radice ſi eſprimerà col ſegno d' ambidue $\sqrt{\frac{3}{7}}$, e non eſſendo pure nella frazione ve-

run numero cubico, la ſua radice cubica ſi eſporrà parimente con l' altro ſegno $\sqrt[3]{\frac{3}{7}}$; ſe pure non foſſe di maggiori numeri, di cui trovandoſi la radice proſſima almeno alla ſua eſatta, con eſſe ſi farebbe la frazione radicale; per eſempio, di queſta frazione $\frac{13925}{30277}$ ſarà proſſima la radice quadra $\frac{118}{174}$ (eſſendo 118 proſſima radice di 13925, alquanto minore, perchè il ſuo quadrato ſarebbe 13924 ſolamente; ed il 174 è radice quadra proſſima al 30277, eſſendo il quadrato di eſſa alquanto minore 30276) e della frazione medeſima dovrebbe dirſi radice quadra $\frac{59}{87}$, che è la ſteſſa con $\frac{118}{174}$, eſſendo queſti due numeri pari, e però diviſibili ambidue per mezzo nell' altra addotta frazione radicale. Parimente della frazione $\frac{68921}{884735}$ la radice cubica proſſima ſarà $\frac{41}{96}$, perchè il cubo di queſta ſarebbe $\frac{68921}{884736}$ proſſimo a quello.

Finalmente ſi oſſervi, che alcuni chiamano *Inneſtamenti*, o pure *Infilzamenti* di varie frazioni il prendere alcuni rotti di altri rotti, per eſempio $\frac{1}{3}$ di $\frac{3}{4}$ di $\frac{3}{5}$ di $\frac{4}{7}$, o a ſoli due per volta, o a tre, o a molti altri, il che quantunque torni difficile a molti, che non trovano la maniera di calcolarli, ſi può facilmente fare, baſtando moltiplicare inſieme i loro numeratori, ed inſieme parimente i denominatori di eſſe frazioni, e fattaſi la frazione col prodotto di quello e di queſto, ne riuſcirà il deſiderato infilzamento. Così de' quattro rotti ſopra propoſti, ne deve riuſcire $\frac{36}{420}$, uguale a $\frac{3}{35}$, dividendoſi per 12 tanto il numeratore quanto il deno-

nominatore; imperocchè moltiplicati insieme i numeratori delle date frazioni 1, 3, 3, e 4, fanno 36, e moltiplicati i loro denominatori 3, 4, 5, e 7, fanno 420. Che ciò sia ben fatto si può così dimostrare $\frac{1}{3}$, di $\frac{3}{4}$ certamente è $\frac{1}{4}$, ed $\frac{1}{4}$ di $\frac{3}{5}$ (che è lo stesso di $\frac{12}{20}$ moltiplicando il numeratore, ed il denominatore per 4) sarà $\frac{3}{20}$, e questo di $\frac{4}{7}$ (che sarebbe il medesimo $\frac{40}{70}$ moltiplicati ambi li numeri per 10) sarà $\frac{6}{70}$, perchè nel 40 il 20, è due volte, onde siccome $\frac{1}{20}$ sarebbe $\frac{2}{70}$, così il $\frac{3}{20}$ è $\frac{6}{70}$; il che per 6 moltiplicato riesce $\frac{36}{420}$, come si era trovato di sopra, uguale però a $\frac{3}{35}$, che sarà la semplice frazione, che riesce nell'infilzamento di $\frac{1}{3}$ del $\frac{3}{4}$, del $\frac{3}{5}$, e del $\frac{4}{7}$. Il che &c.

CAPITOLO XII.

Della Regola del Tre.

Quando tre quantità sono proposte in numeri, e si cerca una quarta, che corrisponda proporzionale alla terza, come la seconda alla prima, allora vi bisogna la regola del Tre, che brevemente si fa così. Si moltiplichi il secondo termine col terzo, e dividasi il prodotto per il primo, sarà il quoziente quel termine quarto che si ricercava, proporzionale a' tre dati. Per esempio, se un Drappo di braccia 30 costasse scudi 50, e si cercasse comprarne braccia 12, si domanda quanti scudi ci vorranno? Si moltipichi il secondo numero 50 nel terzo, che è 12, il prodotto sarà 600, e questo si divida per il primo nu-

```
     50 — 12
    ----
    600
30)  20
```

 me-

mero 30, onde riesce il quoziente 20; però le braccia 12 importeranno 20 scudi.

Conviene avvertire, che alle volte il quesito non è proposto con ordine; per esempio chi dicesse, essendo che 30 braccia mi costano scudi 50, volendo spendere solamente scudi 20, quante braccia potrò averne? La questione non è proposta ordinatamente, ma si dovea dire, se scudi 50 ci danno 30 braccia, con scudi 20 quante braccia si compreranno? e così moltiplicato il secondo nel terzo, che fa 600, e questo diviso per il primo 50 riuscirà 12, che sarà il numero delle braccia ricercate con scudi 20. Però bisogna talmente disporre i termini del quesito, che le cagioni e gli effetti siano in un luogo simile, onde corrisponda il primo al terzo, ed il secondo al quarto quesito, però se nel terzo termine si pongono gli scudi, e si cerca nel quarto il numero di braccia, conviene nel primo termine proporre gli scudi, e nel secondo le braccia che gli corrispondono, e così similmente nelle altre proposte.

Alle volte però conviene adoperare la regola del tre a roverscio, moltiplicando il primo termine nel secondo, e dividendo il prodotto pel terzo, cioè, quando il quarto termine proporzionale, che si cerca, non corrisponde direttamente al suo omologo, ma reciprocamente, cioè quando crescendo il terzo non deve crescere il quarto, ma farsi minore del secondo, come il primo è minore del terzo; per esempio. Suppongo che a spazzare tutte le strade di una Città, o farvi qualche altra opera, 3 uomini la compisca-

piſcano in 8 giorni, ſi cerca di 12 uomini in quanti giorni la compirebbero? Si moltiplichi il primo nel ſecondo, cioè 3 via 8, che farà 24, e ſi divida queſto per il terzo numero, che è 12, ne rieſcono 2 giorni, ne' quali queſti 12 uomini potranno fare lo ſteſſo, eſſendo proporzionale 2 ad 8, come 3 a 12, cioè la quarta parte di eſſi.

Ma ſe i termini non ſono ne direttamente, ne reciprocamente proporzionali, allora non conviene uſare queſta regola. Per eſempio, ſe una carrozza con 2 cavalli fa 3 miglia in un ora, quante miglia farebbe con 6 cavalli nell' ora medeſima? Non creſcendo il numero delle miglia a proporzione del numero de' cavalli, che tirano nel medeſimo tempo la carrozza (altrimenti 6 cavalli farebbero 9 miglia in un ora, perchè 3 via 6 fa 18, e diviſo per 2 reſta 9, il che è falſiſſimo) però non conviene adoperare tal regola, ſe non quando i termini creſcono proporzionalmente, o con diretta o con reciproca proporzione.

La regola del tre dovrà alle volte maggiormente comporſi, quando ſaranno propoſti più di tre termini, come ſarebbe in queſt' altro queſito. Se 4 uomini in 7 giorni ſcavano una foſſa di braccia 252; poſtivi 10 uomini ſimiliſſimi lavoratori, in 13 giorni quante braccia ne ſcaverebbero?

4 7 252 10 13

$\underline{4 \text{——} 7}$ $\underline{10 \text{——} 13}$

28 130

Bisogna ridurre i due primi numeri in un solo prodotto, con la moltiplicazione di essi, cioè, 4 via 7 fa 28, e poi moltiplicare insieme gli due ultimi 10 via 13, che fanno 130, imperocchè 4 uomini in 7 giorni faranno lo stesso, che un solo uomo in giorni 28, e quello si farebbe da 10 uomini in 28 giorni, si farebbe pure da uno in giorni 130, però il quesito sarà simile a questo;

28 252 130

$$\begin{array}{r} 252 \text{———} 130 \\ \hline 32760 \\ 28)\quad 1170 \end{array}$$

se da un Uomo in 28 giorni si fanno 252 braccia, dal medesimo uomo in 130 giorni quante braccia se ne farebbero? Si moltiplichi il secondo nel terzo, cioè 252 in 130, che ne riuscirà 32760, e questo diviso per il primo numero 28, riuscirà 1170; dunque saranno queste le braccia, che in 13 giorni scaverebbero 10 uomini, ovvero un uomo solo in giorni 130.

Talvolta ancora si potrà replicare la regola del tre, in due, o più volte. Per esempio, se un uomo in 4 mesi, con 30 scudi prestati ad un altro, ne ha guadagnati $2\frac{1}{2}$, in quanto tempo prestando 600 scudi, ne potrebbe guadagnare 200?

4 30 $2\frac{1}{2}$ 600 200

Primieramente, siccome in 4 mesi gli 30 scudi, hanno guadagnato $2\frac{1}{2}$, così nello stesso tempo quanti

quanti se ne guadagnerebbero con 600 scudi?

$$30 \quad 2\tfrac{1}{2} \quad 600$$

$$600 \text{ —— } 2\tfrac{1}{2}$$

$$30)\ \overline{1500}$$
$$50$$

moltiplicato il $2\frac{1}{2}$ in 600, diviene 1500, e diviso per 30, ne riesce 50; Quindi però si faccia un altra regola del tre, dicendo;

$$50 \quad 4 \quad 200$$

$$200 \text{ —— } 4$$

$$50)\ \overline{800}$$
$$16$$

se si averebbero (dalli scudi 600) scudi 50 in mesi 4, gli scudi 200 in quanti mesi si acquisterebbero? Moltiplicato il 4 in 200 fa 800, e questo diviso per 50, ne viene 16; dunque in un anno, e nel terzo dell' anno seguente, che saranno mesi 16, verranno acquistati gli scudi 200 per li 600 proposti. Così parimente farassi in altri quesiti proposti.

CAPITOLO XIII.

Della Regola di Compagnia.

QUando più persone concorrono ad un negozio, contribuendo parte del loro danaro, gua-

guadagnano a proporzione del capitale che hanno impiegato a benefizio di quel negozio, allora per ſapere diſtribuire a ciaſcuno quel guadagno, che giuſtamente gli tocca, biſogna ſi adoperi la preſente regola. Si raccolgono in una ſomma i capitali contribuiti da ciaſcuno, e paragonaſi queſta ſomma col guadagno comune, poi ſi cava dal particolar capitale di uno, quale ſia il frutto, che gli ſi deve, onde con la regola del tre ſi trova il guadagno di queſto, e di quell' altro mercante.

Suppongaſi per eſempio, che Pietro contribuiſſe per una mercanzia, o per un negozio ſcudi 1600, Giovanni ſcudi 1450, e Martino ſcudi 1500, che in tutto ſommati ſono 4550, ed il guadagno comune rimanendovi impiegato il capitale di tutti, ſi ſuppone che importi al netto ſcudi 2460; cercaſi come debba diſtribuirſi a ciaſcheduno la ſomma di queſti danari acquiſtati in un medeſimo tempo. Biſogna dire in queſto modo; ſe tutto il capitale, che è 4550, ha acquiſtato per il comun guadagno 2460, che coſa importerà di guadagno il capitale di Pietro 1600? ſi moltiplichi per la regola del tre, il ſecondo numero 2460 col terzo 1600, e riuſcirà 3936000, il che dividaſi pel primo 4550, e ne riuſciranno ſcudi 865 con la frazione $\frac{250}{4550}$, che ſarebbe $\frac{5}{91}$, (diviſo per 50 tanto il numeratore quanto il denominatore) ſicchè il guadagno di Pietro ſarà ſcudi appunto $865\frac{5}{91}$.

Similmente il capitale di Giovanni, che è ſcudi 1450, ſi moltiplichi con lo ſteſſo comun guadagno 2460, e ne riuſcirà 3567000, il che diviſo

ſo pure pel primo numero 4550, ci darà il guadagno di Giovanni 783, con la frazione $\frac{4350}{4550}$, uguale ad $\frac{87}{91}$, diviſo pure come l' altro per 50 tanto il numeratore, quanto il denominatore di eſſa frazione.

Finalmente il capitale di Martino eſſendo 1500 moltiplicato pure in 2460, ſarà 3690000, che diviſo per 4550, ci darà per guadagno di Martino ſcudi 810 con la frazione $\frac{4500}{4550}$, che ſarà $\frac{90}{91}$, eſſendo ſimilmente diviſo l' uno e l' altro numero ſuperiore, ed inferiore per 50; e può ancora provarſi eſſere appunto queſti tre guadagni uguali a tutto il comune, mentre il primo 865 $\frac{5}{91}$, col ſecondo 783 $\frac{87}{91}$, ed il terzo 810 $\frac{90}{91}$ ſommati inſieme ſono uguali al numero 2458 $\frac{182}{91}$, la qual ſomma di frazioni è uguale a 2, eſſendo 182 il doppio di 91; onde aggiunto il 2 alla ſomma delli interi 2458, fa per appnuto il 2460.

Ma ſe queſti Mercanti aveſſero dato il danaro per diverſo tempo, cioè Pietro per 2 anni, Giovanni per 3, Martino per 6, e con tutto quello ſteſſo capitale di ſcudi 4550 aveſſero pure guadagnati gli ſcudi medeſimi 2460; ſi cercherà, quanto di queſto guadagno debba loro diſtribuirſi, oltre la reſtituzione del capitale, da farſi loro in quei tempi determinati. Si moltiplichi qualunque capitale per il numero degli anni, ne' quali fu conceſſo, cioè quello di Pietro ſcudi 1600 per 2 anni fa 3200, quello di Giovanni 1450 per 3 anni fa 4350, l' altro di Martino 1500 per 6 anni fa 9000, e ciaſcheduno di tali prodotti, moltiplicato per il comune guadagno 2460, e diviſo per la ſomma di quei prodotti, che è

16550,

16550, ci determinerà quello che deve darſi a ciaſcuno. Quindi il 3200 moltiplicato per 2460 farà 7872000, che diviſo per 16550, riuſcirà per guadagno di Pietro 475 $\frac{10750}{16550}$, la qual frazione può ridurſi a $\frac{215}{331}$ (diviſo pure l' uno e l'altro numero per 50); l' altro numero 4350 moltiplicato per 2460 fa 10701000, che diviſo per lo ſteſſo 16550, darà a Giovanni 646 $\frac{9700}{16550}$, la qual frazione ſimilmente ſi riduce a $\frac{194}{331}$; e finalmente il terzo numero 9000 moltiplicato per 2460, fa 22140000, il che diviſo per 16550, ci dà 1337 $\frac{12650}{16550}$, la qual frazione rieſce pure $\frac{253}{331}$, e queſto ſarà il guadagno di Martino; in fatti la ſomma di queſti tre numeri interi ſarebbe 2458, che così importano li tre numeri 475, 646, e 1337, e le tre frazioni $\frac{215}{331}$, $\frac{194}{331}$, $\frac{253}{331}$, fanno $\frac{662}{331}$, che è uguale a 2, il che aggiunto all' intera ſomma 2458 farà per appunto 2460, che è tutto il guadagno diſtribuito a' tre Mercanti, come ſi è detto 475 $\frac{215}{331}$ a Pietro, 646 $\frac{194}{331}$ a Giovanni, e 1337 $\frac{253}{331}$ a Martino, che ha più degli altri per aver dato il capitale in maggior tempo.

Altri tre uomini, Aleſſandro, Giorgio, e Lorenzo, dicono d' avere fra tutti guadagnata la ſomma di 2800 ſcudi, avendo il primo Aleſſandro poſto di capitale ſcudi 2000, ed il ſecondo 2350, che fu Giorgio, ma non ſi ricorda quanti ne poneſſe il terzo, cioè Lorenzo, e ſolamente ſapevaſi, che per lui vi erano di guadagno ſcudi 100, però ſi cerca, quanti ſcudi di capitale ne aveſſe dati? e viceverſa, quanti ne guadagnaſſe Aleſſandro, e quanti ne aveſſe Giorgio? Per ritrovare tuttociò, primieramente dal comun guada-

da-

dagno di ſcudi 2800, ſe ne ſottragga il guadagno di 100 venuto a Lorenzo, ne rimarranno ſcudi 2700, che ſaranno convenuti ad ambidue gli precedenti Aleſſandro, e Giorgio; e preſa la ſomma degli ſcudi già da loro propoſti 2000 e 2350, che è 4350, con la regola del tre ſi moltiplichi la ſomma del guadagno de' due primi 2700, con gli ſcudi 2000 dati dal primo, ed il prodotto 5400000, ſi divida per la ſomma 4350 degli ſcudi dati da ambidue, che ſarà 1241 $\frac{1650}{4350}$, la qual frazione diviſa nel numeratore e nel denominatore per 50, diventerà $\frac{33}{87}$, anzi queſti due numeri diviſi per 3, faranno la frazione $\frac{11}{29}$; ſicchè il guadagno di Aleſſandro ſarà 1241 $\frac{11}{29}$, eſſendo ciò proporzionale alla ſomma degli ſcudi 2000 da lui propoſti, come il guadagno d' ambidue 2700, alla ſomma 4350 degli ſcudi da loro inſieme dati. Onde poi il reſto del guadagno de' due primi 2700, levatogli 1241 $\frac{11}{29}$, che rimarrà 1458 $\frac{18}{29}$, ſarà pure il guadagno del ſecondo, cioè di Giorgio. Ci reſta poi da trovare, quale ſia il numero degli ſcudi dati dal terzo, cioè da Lorenzo, e ſi troverà con queſt' altra regola del tre, dovendo eſſere nella ſteſſa proporzione, come il guadagno delli due precedenti 2700 al loro capitale degli ſcudi propoſti 4350, così il guadagno del terzo 100, al capitale del medeſimo Lorenzo; però moltiplicato 4350 in 100, che diverrà 435000, dividendolo per 2700, che rieſce $\frac{435000}{2700}$ uguale a $\frac{4350}{27}$ (levati di ſopra, e di ſotto li due zeri) onde proviene 161 $\frac{3}{27}$, che è lo ſteſſo capitale da eſſo dato di ſcudi 161 $\frac{1}{9}$; (perchè il 3, ed il 27 ſi poſſono dividere per 3.)

Ecco

Ecco adunque ritrovato, e i guadagni di Alessandro e di Giorgio, ed il capitale degli scudi dati da Lorenzo.

CAPITOLO XIV.

Della Regola di Alligazione.

QUando si mescolano insieme varie materie di prezzo diverso, bisogna trovare il valore corrispondente a ciascuna misura della materia così mescolata: e viceversa, proposto qualche prezzo mediocre, tra i prezzi particolari di due materie, occorre ricercare, in quale quantità debbono questa e quella mescolarsi, per poterne vendere il tutto al prezzo mediocre assegnato. L' una e l' altra di tali operazioni si regolano nel modo, che insegna questa regola detta di Alligazione, come si vedrà in questi esempj.

Primieramente, per sciogliere il primo quesito, si raccolgano in una somma i numeri delle misure mescolate; Si raccolga altresì in una somma il valore corrispondente a ciascuna di esse, e si divida questa seconda somma per la prima, sarà tal quoziente il valore di una misura della materia mescolata. Per esempio: un Orefice ha tre sorte di argenti, il primo vale 9 lire l' oncia, il secondo 7 lire, e il terzo 6 lire; ne mescola insieme 18 once del primo, 10 del secondo, e 12 del terzo, si cerca, quale sarà il giusto prezzo di qualunque oncia della massa così mescolata. Si raccolga in una somma il numero dell'

18	— *a lire*	9	—	162
10	— *a*	7	—	70
12	— *a*	6	—	72
40				304
		40)		$7 \frac{3}{5}$

dell'once insieme mescolate, che 18, 10, e 12, ne sono 40, e perchè l'once 18 del primo a 9 lire l' una nè importano 162, e le 10 del secondo a 7 lire di ciascuna ne importa 70, e le 12 del terzo a 6 lire l' una ne danno lire 72, raccogliendo insieme questi prezzi 162, 70, e 72, importa tutta la massa lire 304; però dividendo tal somma per il numero dell' once 40, ne risulta il prezzo di qualunque oncia lire 7 e 12 soldi; imperocchè 40 via 7 sarebbe 280, sicchè tolto ciò dal 304, ne rimane 24; dunque diviso il 304 per 40 riesce lire $7 \frac{24}{40}$, la qual frazione ha i numeri divisibili per 8, onde rimane $7 \frac{3}{5}$; però la quinta parte della lira (composta in Toscana di 20 soldi) essendo 4 soldi, i $\frac{3}{5}$ sono appunto 12 soldi da aggiungersi alle 7 lire per ciaschedun oncia di quella somma d'argento.

Volendo poi sciogliere il secondo quesito, si deve pigliare la differenza del prezzo mediocre dal prezzo massimo, e l'eccesso del mediocre dal minimo; indi alternativamente si piglino tante misure della materia di maggior valore, quante sono le unità dell'eccesso del mediocre sopra il minimo, e poi si aggiungano tante misure della materia di minor valore, quante unità sono nella differenza del prezzo mediocre dal massimo; così

così con queste misure si farà una massa da vendersi al prezzo mediocre proposto.

Per esempio, un Mercante ha due specie di vino, o d' olio, delle quali la prima importa di prezzo soldi 20 il fiasco, e la seconda soldi 13 solamente; vorrebbe egli mescolarli in tal dose, che si dovesse vendere soldi 15 il fiasco, onde ricerca quanti fiaschi dell' uno e dell' altro debba insieme unire. Si osservi, che la differenza del prezzo mediocre 15 dal maggiore 20, è di 5, e la differenza del prezzo minimo 13 dallo stesso mediocre, è solamente 2; si piglino adunque 2 misure della prima specie, e 5 dell' altra minima, e si mescolino insieme; così riusciranno 7 misure mescolate da vendersi al prezzo mediocre proposto di soldi 15 il fiasco; Imperocchè il valore di 2 misure del massimo prezzo 20 sarebbe soldi 40, ed il valore di 5 misure del minimo prezzo 15 sarebbe soldi 65; e però il valore di tutte quelle 7 misure sarà soldi 105, che divisi per 7, danno 15 soldi per ciascheduna misura, il che appunto è il prezzo mediocre proposto; e siccome ciò avviene, presi due fiaschi del maggior prezzo, e cinque fiaschi del minore, così ancora si potranno mescolare due barili del primo, con cinque barili del secondo; e lo stesso si farebbe con qualunque misura dell' uno e dell' altro, con simile proporzione mescolata.

Se occorresse di mescolare insieme più di due specie di roba: per esempio, il primo vino che costa 18 soldi il fiasco; il secondo che ne costa 13 soldi, il terzo che ne costa 10 soldi; e si vorreb-

rebbero mescolare in maniera, che possa vendersi 15 soldi il fiasco; si pigli la differenza di questo mediocre prezzo 15 dal maggiore 18, che è 3, indi la differenza del medesimo 15 dal minore 13, che sarà 2, e dal minimo 10, che è 5; poscia si piglino 2 misure del primo, e 3 del secondo, come si è veduto doversi fare nel caso di sopra, tra il primo e il secondo: e dipoi 5 altre misure del primo, e 3 del terzo, come importerebbe la sola mescolanza di questi due, ne avremo adunque 7 misure del primo, 3 del secondo, e 3 pure del terzo, che in tutto saranno 13, e dovranno valere 15 soldi per fiasco, cioè 195 soldi in tutto, perchè 7 del primo, che vale 18 per ciascun fiasco, ne importa 126, 3 del secondo, che ne vale 13 per ciascuno, ne importa 39, e i 3 del terzo, che ne vale 10 per qualunque fiasco, ne importa 30, le quali misure portano similmente lo stesso prezzo di 195.

E se fossero ancora da unirsi più specie diverse, come se la libbra di Pepe valesse 3 paoli, quella di Garofano paoli 2, quella di Cannella paoli 6, e quella di Zafferano paoli 9, e si volessero mescolare in maniera, che si paghi paoli 5 la libbra; notata la differenza di ciascun prezzo dal medio *M*, che sarà dal Pepe *P.* 2 paoli, dal Garofano *G.* 3 paoli, dalla Cannella *C.* paoli 1, e dal Zafferano *Z.* paoli 4; si pongano tante libbre del Pepe, e del Garofano, che sono di minor prezzo del

P.	3		2
G.	2		3
M.	5		
C.	6		1
Z.	9		4

medio, quanta è l'altra ſomma delle differenze di eſſo medio, dagli altri due della Cannella, e del Zafferano, che hanno prezzo maggiore; e poi tante libbre di Cannella e di Zafferano, quanta è la ſomma delle differenze del medio dagli altri due Pepe e Garofano, che hanno prezzo minore; ſicchè 1 e 4 facendo 5, baſta prendere 5 libbre di Pepe, e libbre 5 di Garofano; ed eſſendo ancora le differenze 2 e 3 parimente uguali a 5 (ſe foſſero in altro numero, in quello ſi prenderebbero pure gli altri) ſi potranno prendere altresì libbre 5 di Cannella, e libbre 5 di Zafferano, e così la ſomma di tali robe meſcolate, dovrà pure farſi pagare a 5 paoli la libbra; imperocchè libbre 5 di Pepe coſtano paoli 15, altrettante di Garofano paoli 10, quelle pure della Cannella paoli 30, e le altre cinque di Zafferano paoli 45, la cui ſomma è 100, però eſſendo tutto il meſcuglio di queſte quattro coſe libbre 20, avendone 5 ciaſcheduna, è chiaro che i paoli 100 con cui ſi comprano, corriſpondono per l'appunto 5 a ciaſcuna delle ſteſſe libbre 20, e così potrà farſi qualunque altra meſcolanza di più coſe, con queſta Regola di Alligazione, purchè il prezzo che ſi vuole che abbia la loro ſomma ſia medio, cioè maggiore di quello di alcuni, e minore di quello degli altri.

5	*P.*	—	15
5	*G.*	—	10
5	*C.*	—	30
5	*Z.*	—	45
			100

Se voleſſe uno farſi fare una Statua di libbre 35 d' argento, e pagare 86 paoli ciaſcuna libbra, non potendo pagarla tutta, ſe non con paoli

3010; l' Argentiere, che avea una ſorte d' argento di paoli 90 la libbra, un altra di 84, ed una terza di 80 paoli la libbra, come potrà meſcolare quelle ſorti d' argento, perchè la Statua di 35 libbre veniſſe a coſtare paoli 86 la libbra? Io dico che dovrà dargli del primo argento libbre 17 ½, del ſecondo e del terzo libbre 8, con 9 once tanto dell' uno quanto dell'altro, la ſomma delle quali ſarà le libbre 35, che a paoli 86 l' una, importeranno paoli 3010; imperocchè le libbre 17 ½ del primo, di cui ciaſcuna libbra nè vuole 90 paoli, importeranno paoli 1575: le libbre 8 del ſecondo a paoli 84 di ciaſchedu-na, ſaranno paoli 672, e le 9 once, che ſono 3 quarti della libbra, ne importano paoli 63, e però tutto il prezzo di libbre 8 e 9 once, importa paoli 735; le libbre poi del terzo argento, eſſendo 8, importa paoli 640, e le ſue once 9, che ſono tre quarti della libbra, ne importano paoli 60, onde tutto il di lui prezzo ſarà paoli 700, le quali tre ſomme importeranno pure paoli 3010, come ſi vuol dare per tutto l' argento di 35 libbre della Statua.

Libbre.	*Once.*
17	6
8	9
8	9
35	—

1575
735
700
3010

Come ſianſi trovati queſti numeri delle libbre di tali argenti, può dimoſtrarſi così: ſi trovino le differenze del medio 86 dal primo 90, che è 4, e dal ſecondo 84, che è 2, e dal terzo 80, che è 6, però del primo prendaſi le libbre 2

e le libbre 6, che sono libbre 8, e del secondo e del terzo si prendano le libbre 4, secondo le addotte differenze; quindi sarebbero 16 libbre composte delle 8 del primo argento, di 4 del secondo, e di altre 4 del terzo, le quali libbre costeranno paoli 86 per ciascheduna, essendo 16 via 86 uguale a 1376, siccome 8 via 90 uguale a 720 e 4 via 84 uguale a 336, e 4 via 80 uguale a 320, che pure posti insieme sommano 1376; ma dovendo averne non solo quelle 16 libbre, che costano paoli 1376, ma libbre 35, che sono il doppio e $\frac{3}{16}$; perciò del primo argento prese 16, del secondo 8, e pure del terzo 8, diventeranno 32, e dovendo aggiungergli altre 3, il primo (che ha sempre il doppio del secondo e del terzo, cioè ad ambidue uguale) deve pure accrescersi di una libbra e mezza, e l' altra libbra e mezza negli altri due, dividendole ugualmente in ciascuno, che però si aggiungono once 9 al secondo, ed once 9 al terzo, le quali prese insieme sono 18, onde le libbre del primo devono essere 17 $\frac{1}{2}$, del secondo 8 libbre con 9 once, e del terzo altrettanto, come sopra si è detto.

P.	90	4
M.	86	
S.	84	2
T.	80	9

```
  720
  336
  320
 ----
 1376
```

CA-

CAPITOLO XV.

Della Regola del Falso.

DA un falso supposto si cava la vera ipotesi di qualche ignoto quesito, allorchè dipende dalla moltiplicazione, dalla divisione, o da qualche proporzionalità, e questa Regola chiamasi *di Falsa posizione*, a differenza della Regola *di doppia falsa posizione*, la quale si può ancora adoperare in quelle questioni, in cui entra la sottrazione e l'addizione.

Per esempio della prima; uno abbia lasciati sette mila scudi da distribuirsi a tre figliuoli, in maniera però, che la porzione del primo sia tripla di quella del secondo, e quella pure del secondo sia doppia di quella del terzo; si cerca, come debba farsi questa distribuzione? Suppongasi ad arbitrio, che di qualsivoglia numero, per esempio, ne tocchino 50 al terzo figliuolo, ne dovranno toccare 100 al secondo, e 300 al primo, avendo il primo un triplo del secondo, ed il secondo un duplo del terzo; dunque tutti sarebbero solamente scudi 450, ma doveano essere 7000, dunqne è falso il supposto; quindi però se ne caverà il vero, dicendo per la regola del tre, se 450 vengono dalla falsa ipotesi della porzione supposta di soli scudi 50 dati al terzo figliuolo, gli scudi 7000, qual vera porzione importeranno al medesimo terzo figliuolo? ed operando al solito si moltiplichi il secondo nel terzo, cioè 50 in 7000, ne risulterà 350000, e questo diviso per

il primo numero 450, ne riuſcirà $777\frac{7}{9}$; onde queſto dovrà veramente darſi al terzo figliuolo, il doppio $1555\frac{5}{9}$ al ſecondo, ed il triplo di queſto, che ſarà $4666\frac{6}{9}$ (cioè $4666\frac{2}{3}$) al primo, la ſomma de' quali è 7000; cioè appunto gli ſcudi laſciati dal Padre a gli ſteſſi figliuoli, con la ſuddetta condizione, onde ſi è ritrovata la vera diſtribuzione, che dovea farſi.

$$\begin{array}{r} 777\frac{7}{9} \\ 1555\frac{5}{9} \\ 4666\frac{6}{9} \\ \hline 7000 \end{array}$$

Similmente dicendoſi da un Signore, di avere con 275 ſcudi fatta comprare una carrozza, un caleſſe, e due cavalli, e che il prezzo della carrozza fu triplo di quello del caleſſe, e i cavalli coſtarono tre metà del prezzo di eſſo caleſſe; ſi cerca, quale era il prezzo della carrozza, quale del caleſſe, e quale de' due cavalli? Suppongaſi benchè falſamente, che ſi compraſſero i cavalli con ſcudi 12, però il caleſſe ne importerebbe 8, eſſendo il 12 tre metà di 8, cioè 3 volte 4, e la carrozza ne averebbe avuti 24, coſtando il triplo del caleſſe, e la ſomma di queſti tre prezzi ſarebbe 44, e con la regola del tre, ſiccome è il 44 al prezzo di alcuna di queſte coſe, per eſempio a quello del caleſſe, che è 8, così i 275 ſcudi ſpeſi da quel Signore, averanno la ſteſſa proporzione al ſuo vero prezzo del caleſſe; onde moltiplicando l' 8 in 275 ſi averà 2200, che diviſo per 44 ne dà 50; dunque 50 ſcudi è il vero prezzo del caleſſe, ed il triplo di eſſo 150 ſarà il prezzo della carrozza, e quello de' cavalli, che ha tre metà di

$$\begin{array}{r} 12 \\ 8 \\ 24 \\ \hline 44 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ 150 \\ 75 \\ \hline 275 \end{array}$$

di 50 (prezzo del Calesse) riuscirà 75, la somma de' quali prezzi è appunto il 275, che tanti sono gli scudi pagati da esso Signore in queste tre compre.

La regola poi della doppia falsa posizione, si fa in quest' altra maniera, esaminando la questione prima, per qualunque falso numero, e poi per un altro: se tutti due sono maggiori o tutti due minori del numero vero, se ne notano gli eccessi, e i difetti; indi moltiplicando alternativamente la prima posizione per l' errore della seconda, e la seconda posizione per l'errore della prima, la differenza di questi prodotti, si divide per la differenza d'ambi gli errori, ed il quoziente sarà il vero numero ricercato; ma se uno degli errori fosse maggiore del vero numero, e l' altro minore di esso, si piglia la somma di que' prodotti, e dividesi per la somma d' ambi gli errori, ed il quoziente ci darà pure il proprio numero, che ricercavasi.

Per esempio; interrogato un Pastore, quante fossero le sue pecore. Rispose. Se fossero altrettante, con la metà di tante, e con un terzo di tante, aggiuntavi la mia persona, saremmo appunto 120; si cerca quante fossero tali pecore? Suppongo a capriccio, che fossero 12, le quali raddoppiate diventerebbero 24, ed aggiunta la metà di esse, sarebbero 30, essendo il 6 la metà di 12, la cui terza parte essendo poi 4, aggiuntovi questo diventerebbero 34, e col pastore 35; ma dovevano essere 120, dunque l' errore è un difetto di 85. Suppongasi un altra volta, che le pecore fossero 18, il loro doppio 36, ed

aggiuntavi la metà di eſſe, che è 9 diventerebbero 45, poi adattatovi il terzo delle medeſime, cioè 6, diventerebbero 51, e computatovi il Paſtore, ſarebbero 52, il che differiſce dal numero propoſto 120 per 68. Si moltiplichi adunque la prima ipoteſi 12 pel ſecondo difetto 68, del che ne proviene 816, e moltiplicando la ſeconda ipoteſi 18 pel difetto 85 della prima, ne proviene 1530; ed eſſendo gli errori ſimili, piglio la differenza di queſti prodotti, che è 714, e la divido per la differenza de' ſuddetti errori 68 e 85, che è 17, onde rimane il quoziente 42, e queſto appunto ſarà il numero delle pecore, il cui doppio ſarebbe 84, ed aggiuntovi la metà di 42, che è 21, ſi fa 105, e col terzo di eſſo 42, che è 14, ne riſulterà 119, che con il Paſtore ſaranno appunto 120, ſiccome era propoſto.

12	18
85	68
1530	816

Ma ſe la ſeconda porzione foſſe ſtata maggiore, ſupponendo per eſempio, che le pecore foſſero 48, e duplicate ſarebbero 96, e con la metà di eſſe, cioè 24, diventerebbero 120, e con la terza loro parte, cioè 16, ſi ſarebbero 136, e col Paſtore rimarrebbero 137, onde ſopra il dato numero 120 vi ſarebbe l' eccesſo 17, onde moltiplicata la prima poſizione 12 con queſto eccesſo 17, diviene 204, e moltiplicata la ſeconda

12	48
85	17
4080	204

da

da posizione 48 col difetto della prima 85, si produce 4080; ed ora deve pigliarsi la somma di tali prodotti, che sarà 4284, e dividerla per la somma di quegli errori 17 e 85, eccesso e difetto, che fanno 102, per la quale divisione parimente risulta il 42 vero numero di esse pecore, come si è veduto di sopra.

La miglior regola però di tutte queste questioni, ancora più intrigate, sarebbe quella dell'Algebra, che è più universale, e più esatta, la quale però in queste brevi instruzioui non può spiegarsi a dovere, richiedendo ciò una nuova maniera di calcolo, che si vedrà a suo luogo nelle Instituzioni Algebratiche.

CAPITOLO XVI.

Delle Combinazioni del Lotto, che suol farsi in Genova, in Milano, in Roma, ed altrove.

DOvendosi fare l' estrazione di 5, dal numero di 100, o di 90 uomini, o di più o di meno in qualche luogo, molti sogliono concorrere con i suoi danari a nominarne uno, o due, o tre, o quattro, o cinque di quelli che saranno estratti per sorte da tutto il numero di essi; Però in quante maniere si possa guadagnare, o perdere intorno a ciò che da costoro sia stato proposto, si potrà cavare da quel che si anderà quivi dimostrando.

Conviene però determinare in quante maniere da un dato numero di varj uomini, si possa per sorte,

te cavare il quintuplo, o il quadruplo, o il triplo, o il duplo, o altro calcolo di essi. Certamente il cavarne uno, quante volte può occorrere, quanti sono gli uomini proposti da cavarsi; ma il cavarne 2, dipende dalla somma di tutti i numeri antecedenti al numero degli stessi proposti; il cavarne 3, dipende pure dalla somma de' numeri de i due corrispondenti a ciascuno de' precedenti numeri; similmente il cavarne 4, dipende dalla somma de' numeri dei tre in ciascuno de' numeri antecedenti; e così il cavarne 5, dipende dalla somma de' numeri de i quattro pure in qualunque de' numeri precedenti.

Suppongasi, che proposti siano solamente 7 uomini *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*; se si deve cavarne un solo, certo qualunque di essi può esserne levato, onde pure in 7 maniere se ne caverà uno diverso; se si devono cavarne due, potranno essere, o solamente *ab*, ò pure *ac*, ò *ad*, ò *ae*, ò *af*, ò *ag*, ò *bc*, ò *bd*, ò *be*, ò *bf*, ò *bg*, ò *cd*, ò *ce*, ò *cf*, ò *cg*, ò *de*, ò *df*, ò *dg*, ò *ef*, ò *eg*, ò *fg*, che sono 21 maniera con cui se ne cavano 2, ed essendo appunto i numeri antecedenti al 7, cioè 6, 5, 4, 3, 2, 1, sommati insieme uguali a 21: perciò si fa manifesto, che il numero de' bini uomini, che possono estraersi da un proposto numero di tutti, è uguale alla somma di tutti i numeri precedenti, onde il numero di 2 in due proposti è 1 bino, in tre proposti è 3 bini, in 4 è 6, in 5 è 10, in 6 è 15, che insieme fanno 35, e tanti saranno i suoi ternarj, che appunto dovranno essere *abc*, *abd*, *abe*, *abf*, *abg*, *acd*, *ace*, *acf*, *acg*, *ade*, *adf*, *adg*, *aef*, *aeg*, *afg*, *bcd*, *bce*,

bcf,

bcf, bcg, bde, bdf, bdg, bef, beg, bfg, cde, cdf, cdg, cef, ceg, cfg, def, deg, dfg, efg; I quadernarj pure ſaranno altrettanti, cioè 35 (perchè i ternarj di 6 ſarebbero 20, e di 5 ſaranno 10, e di 4 ſaranno 4, e di 3 un ſolo, che pure tutti queſti numeri fanno 35) riducendo *abcd, abce, abcf, abcg, abde, abdf, abdg, abef, abeg, abfg, acde, acdf, acdg, acef, aceg, acfg, adef, adeg, adfg, aefg, bcde, bcdf, bcdg, bcef, bceg, bcfg, bdef, bdeg, bdfg, befg, cdef, cdeg, cdfg, cefg, defg*: E i quinarj ſarebbero 21 (eſſendo i quaternarj nel numero 6 ſolamente 15, nel numero 5, appunto 5, e nel 4 un ſolo, che fanno appnnto 21) cioè, *abefg, abcde, abcdf, abcdg, abcef, abceg, abcfg, abdef, abdeg, abdfg, acdef, acdeg, acdfg, acefg, adefg, bcdef, bcdeg, bcdfg, bcefg, cdefg, bdefg*.

E ciò baſti di aver dimoſtrato in queſti pochi numeri di 7, perchè ne' maggiori numeri troppo maggiori ſarebbero le poſſibili eſtrazioni di eſſi; però nella ſeguente tavola ſi eſporranno i numeri de' quintupli, de' quadrupli, de' ternarj, e de' duplici in ciaſcun numero prolungato fino a i 100.

Unità

Unità	*Binarj.*	*Ternarj.*	*Quadernarj.*	*Quinarj.*
1				
2	1			
3	3	1		
4	6	4	1	
5	10	10	5	1
6	15	20	15	6
7	21	35	35	21
8	28	56	70	56
9	36	84	126	126
10	45	120	210	252
11	55	165	330	462
12	65	220	495	792
13	78	286	715	1287
14	91	364	1001	2002
15	105	455	1365	3003
16	120	560	1820	4368
17	136	680	2380	6188
18	153	816	3060	8568

Unità,	*Binarj*	*Ternarj*.	*Quadernarj*.	*Quinarj*.
19	171	969	3876	11628
20	190	1140	4845	15504
21	210	1330	5985	20349
22	231	1540	7315	26334
23	253	1771	8855	33649
24	276	2024	10626	42504
25	300	2300	12650	53130
26	325	2600	14950	65780
27	351	2925	17580	80730
28	378	3276	20475	98280
29	406	3654	23751	118755
30	435	4060	27405	142506
31	465	4495	31465	169911
32	496	4960	35960	201376
33	528	5456	40920	237336
34	561	5984	46376	278256
35	595	6545	52360	324632
36	630	7140	58905	376992

Unità.	Binarj.	Ternarj.	Quadernarj.	Quinarj.
37	666	7770	66045	435897
38	703	8436	73815	501942
39	741	9139	82251	575757
40	780	9880	91390	658008
41	820	10660	101270	749398
42	861	11480	111930	850668
43	903	12341	123410	962598
44	946	13244	135751	1086008
45	990	14190	148995	1221759
46	1035	15180	163185	1370754
47	1081	16215	178365	1533939
48	1128	17296	194580	1712304
49	1176	18424	211876	1906884
50	1225	19600	230300	2118760
51	1275	20825	249900	2349060
52	1326	22100	270725	2598960
53	1378	23426	292825	2869685
54	1431	24804	316251	3162510

Unità.	*Binarj.*	*Ternarj.*	*Quadernarj.*	*Quinarj.*
55	1485	26235	341055	3478761
56	1540	27720	367290	3819816
57	1596	29260	395010	4187106
58	1653	30856	424270	4582116
59	1711	32509	455126	5006386
60	1770	34220	487635	5461512
61	1830	35990	521855	5949147
62	1891	37820	557845	6471002
63	1953	39711	595665	7028847
64	2016	41664	635376	7624512
65	2080	43680	677040	8259888
66	2145	45760	720720	8936928
67	2211	47905	766480	9657648
68	2278	50116	814385	10424128
69	2346	52394	864501	11238513
70	2415	54740	916895	12103014
71	2485	57155	971635	13019909
72	2556	59640	1028790	13991544

Unità.	*Binarj.*	*Ternarj.*	*Quadernarj.*	*Quinarj.*
73	2628	62196	1088430	15020334
74	2701	64824	1150626	16108764
75	2775	67525	1215450	17259290
76	2850	70300	1282975	18474840
77	2926	73150	1353275	19757815
78	3003	76076	1426425	21111090
79	3081	79079	1502501	22537515
80	3160	82160	1581580	24040016
81	3240	85320	1663740	25621596
82	3321	88560	1749060	27285336
83	3403	91881	1837620	29034396
84	3486	95284	1929501	30872016
85	3570	98770	2024785	32801517
86	3655	102340	2123555	34826302
87	3741	105995	2225895	36949857
88	3828	109736	2331890	39175752
89	3916	113564	2441626	41507642
90	4005	117480	2555190	43949268

Unità.	Binarj.	Ternarj.	Quadernarj.	Quinarj.
91	4095	121485	2672670	46504458
92	4186	125580	2794155	49177128
93	4278	129766	2919735	52971283
94	4371	134044	3049501	54891018
95	4465	138415	3183545	57940519
96	4560	142880	3321960	61124064
97	4656	147440	3464840	64446024
98	4753	152096	3612280	67910864
99	4851	156849	3764376	71523144
100	4950	161700	3921225	75287520

Non è ſola la maniera di ſopra eſpoſta per comporre queſta Tavola con queſti numeri determinati, che altresì può ſervire in altri numeri maggiori propoſti; ma ciò può ancora ottenerſi in altre maniere, eſſendo ogni determinazione de' numeri binarj, o ternarj, o quadernarj, o quinarj uguale ancora alla ſomma della ſua antecedente, e dell' antecedente pure dell'altro ſuo precedente. Per eſempio, nel binario dell' unità 94, che è 4371, la ſomma di queſti due fa il 4465, che ſarà il binario di 95; il ternario poi di 94 eſſendo 34044, ſommato col binario di eſſo 4371, che rieſce

138415, sarà pure il ternario di 95 e parimente sommato il ternario di 94, cioè 134044, col quadernario di esso 3049501, la somma di essi 3183545 è il quadernario di 95; e similmente con quel quadernario di 94, cioè 3049501, aggiuntovi il suo quinario 54891018, si averà 57940519, che è appunto il quinario di 95; e così accade in tutti.

Anzi dato un proposto numero di uomini, se si cerca quanti binarj possano indi cavarsi, basta moltiplicare esso numero nel precedente, e questo prodotto diviso pel mezzo sarà il quoziente de' binarj. Per esempio, se il numero degli uomini è 90 moltiplicato in 89 fa 8010, il che diviso pel mezzo, riesce 4005, e tale pure è il numero de' suoi binarj, come può vedersi nella tavola precedente. Similmente se gli uomini sono 100, moltiplicato ciò per 99, che fa 9900, e diviso pel mezzo ne dà 4950, il quale appunto è il numero de' suoi binarj; e se tali uomini fossero pure 145, moltiplicato ciò in 144, farebbe 20880, la cui metà 10440 sarebbe il numero de' suoi binarj.

Similmente, cercandosi quanti ternarj possano provenire da un dato numero d' uomini, conviene moltiplicare tal numero nel precedente, e nel prossimo anteriore, il quale prodotto, diviso per 6 ci darà il quoziente de' suoi ternarj; così essendo 90 li dati numeri, ciò si moltiplichi in 89, che fa 8010, e questo pure in 88, che riuscirà 704880, e ciò diviso per 6 riesce 117480, che appunto è il numero de' suoi ternarj. Similmente, essendo 100 il numero, moltiplicasi

plicasi il 100 in 99 ed in 98, dal che ne proviene 970200, che diviso per 6 dà 161700, il che appunto è il numero de' suoi ternarj; e se gli uomini fossero solamente 23, moltiplicato ciò per 22, che fa 506, e poscia ancora per 21, che farà 10626, ciò diviso per 6 ne viene 1771, che per l'appunto è il numero de' suoi ternarj, come può vedersi in detta tavola.

Ma cercando il numero de' quadernarj, converrà moltiplicare il numero degli uomini ne' tre numeri ad esso precedenti, e dividerne il prodotto per 24. Così ne i 90 si moltiplichi ciò per 89, per 88, e per 87, dal che ne procede 61324560, il che diviso per 24, ci dà i quadernarj 2555190; e se gli uomini sono 100 moltiplicato ciò per 99, indi per 98, poscia per 97 diviene 94109400, e ciò diviso per 24, dà 3921225, che tali sono i suoi quadernarj; e se il numero degli uomini fosse solamente 18, moltiplicando ciò in 17 fa 306, e poscia in 16 diverrà 4896, indi in 15 riuscirà 73440, che diviso per 24 darà 3060, che appunto tanti sono li suoi quadernarj.

Volendo finalmente trovare il numero de' quinarj, bisognerà moltiplicare il numero degli uomini in ciascuno de' quattro precedenti, e il prodotto dividerlo per 120; così nel numero di 90 si moltiplichi ciò per 89, indi per 88, poscia per 87, e finalmente per 86, che diverrà 5273912160, e questo diviso per 120, ne apporta 43949268 quinarj; se poi il numero fosse 100, si moltiplichi in 99, indi in 98, poscia in 97, e finalmente in 96, ed avremo 9034502400, il

che diviſo per 120 rieſce 75287520, eſſendo appunto tanti i quinarj di 100; e parimente, ſe il numero degli uomini foſſe ſolamente 43, moltiplicato ciò per 42 che fa 1806, poſcia per 41 che riuſcirà 74046, indi per 40 che darà 2961840, e finalmente per 39 il cui prodotto ſarà 115511760, che diviſo per 120, ne dà i quinarj 962598, come appunto ſi ha nella tavola ſopra addotta.

Chi però nel giuoco del lotto proponeſſe dovere inſieme uſcire per ſorte 5 particolari Senatori da quei 100, o da quei 90 dove ſi tira il quinario, non potrà avere ciò indovinato ſe non una volta, in cui poteſſero riuſcirne quelli ſteſſi da lui propoſti, potendone riſalire 75287520 quinarj; e viceverſa potrebbe mancargli 75287519 volte, in cui ſi faceſſero altri quinarj, ſuppoſto che i detti Senatori foſſero 100, che ſe foſſero 90 eſſendo li ſuoi quinarj 43949268, gli mancherebbero almeno gli altri 43949267.

Chi ne aveſſe propoſti ſolamente 4 particolari, eſſendo 100 i Senatori, ſi potrebbe aggiungere nel quinario uno degli altri 96, e però in 96 maniere potrebbe guadagnarci, e nelle rimanenti 75287414 non potrebbe vincere; ed eſſendo eſſi propoſti ſolamente 90, ſimilmente potrebbe guadagnare in 86 volte, ma non potrebbe vincere nelle rimanenti 43949182.

Eſſendone poſcia propoſti 3 ſoli, ſe 100 ſono i Senatori, potrà eſſere, che ne' quinarj ſe ne aggiungano a quei 3, altri 2 negli altri 97, i quali ſarebbero 4656; onde in queſte volte potrebbe

be guadagnarci, ma non nelle ſeguenti 75282864; ed eſſendo quelli 90, ſi aggiungerebbero gli altri 2 alli 87, onde in 3741 volte potrebbe guadagnare, ma gliene mancherebbero 43945527.

E ſe ne proponeſſe 2 ſoli, da gli altri 98, ſe ſono 100 li Senatori dovranno aggiungerſene tre ne i quinarj, perciò 152096 volte potrebbe guadagnarci, ma ci perderebbe nelle rimanenti 75135424; ed eſſendo eſſi propoſti ſolamente 90, ſe ne aggiungerebbero 3 dalli 88, onde guadagnar potrebbe in 109736, e gli mancherebbe il guadagno in 43839532 volte.

Se poi ne aveſſe nominato un ſolo de i 100, ſi aggiungerebbero 4 ne i quinarj dalli rimanenti 99, onde 3764376 volte potrebbe guadagnarci, e ne perderebbe nelle rimanenti volte 71523144, e ſe fuſſero i ſottopoſti ſolamente 90, degli altri 89 ſe ne aggiungerebbero i 4, che ſaranno 2441626 le volte, in cui potrebbe guadagnare, e ſolo gli mancherebbero 41507642.

Quindi è chiaro eſſere alquanto più facile il guadagnare proponendo uno, che due, ed ancora più facile con proporre due, che tre, e molto più facile il proporre tre ſoli, che quattro, ed alquanto meglio il proporre quattro, che cinque; eſſendo più difficile di tutti il propoſto di cinque, ed ancora il propoſto di quattro più difficile di ciaſcuno de' ſeguenti tre, due, ed uno; ed il propoſto di tre più difficile, che quello di due, ed uno; ſiccome quello di due è più difficile del propoſto di un ſolo; e ciaſcheduno nel numero maggiore de' Senatori ha più mancanza, che nel loro numero minore, come ſi è

dimostrato tra la moltitudine di 100, e tra quell' altra di 90.

Però se dovessero cavarsi cinque da sei uomini solamente, chi ne proponesse due soli, averebbe ugual numero di guadagno che di mancanza, essendo 3 il guadagno, e 6 manco 3, cioè pure 3 la mancanza; e proposto un solo, averebbe cinque volte il guadagno, ed una volta sola gli mancherebbe; se essi uomini fossero 7, propostone uno, si potrebbe 15 volte guadagnare, e solamente 6 volte perdere; e similmente più il guadagno, che la mancanza sarebbe nel numero 8, e nel 9, e finalmente nel 10 sarebbe uguale il guadagno con la mancanza, concorrendo l'uno, e l'altra nel 126, come si è dimostrato di sopra; ma poscia in maggior numero degli uomini da sottrarsi, sarà sempre maggiore la mancanza, che il guadagno in un solo, e molto più in un binario, e più nel ternario, più nel quadernario, ed assai più nel quinario; onde mi pare troppo rischio il concorrere a questa sorte di lotti, in cui nè meno può prendersi quei nomi che debbano per sorte essere estratti da quel fanciullo, da cui si fanno cavare.

CAPITOLO XVII.

De' Logaritmi Aritmetici.

SOgliono costituirsi i Logaritmi ad altri numeri geometricamente proporzionali, di cui il primo sia la radice, il secondo è il quadrato, il terzo è il cubo, il quarto dicesi biquadrato, il quin-

quinto è surdesolido, il sesto quadratocubo &c. essendo il primo moltiplicato in se stesso, fa il secondo, ed il secondo moltiplicato nel primo, fa il terzo, ed il terzo moltiplicato nel primo, fa il quarto, ed il quarto pure moltiplicato nel primo, fa il quinto, e così gli altri continuamente proporzionali; ma i Logaritmi, possone uno, di qualsivoglia numero, alla prima radice, il doppio di esso è Logaritmo al quadrato, ed il triplo del medesimo è Logaritmo al cubo, ed il quarto dello stesso è Logaritmo al biquadrato, ed il quinto di esso è Logaritmo al surdesolido &c.

Per esempio, essendo geometricamente Proporzionali questi numeri, che cominciano dal 2 sono pure Logaritmi questi sottoposti, che cominciano dal 3, o pure dal 7 &c.

Proporzionali -	2	4	8	16	32	64	128	&c.
Logaritmi ——	3	6	9	12	15	18	21	&c.
o pure ———	7	14	21	28	35	42	49	&c.
e così altri &c.								

E così ancora si osservi in essi Proporzionali, che uno essendo composto di due altri moltiplicati insieme, il Logaritmo di quello sarà composto dei Logaritmi degli altri due nella medesima serie. Per esempio, essendo il 128 composto da 32 moltiplicato in 4, il Logaritmo di 128, che è il 21, resta composto delli due 15 e 6 (attenenti al 32, ed al 4) che restano insieme 21; o pure, se il Logaritmo di 128 fosse il 49, sarà pure composto con 35, e 14 Logaritmi di 32, e di 4, e così gli altri; così il 4 moltipli-

cato in 16 facendo 64, i Logaritmi di que' due, che sono 6, e 12, composti insieme, fanno il 18 Logaritmo di 64; o pure di 16 è 4, essendo Logaritmi 28, e 14 la somma pure di questi fa 42, che pure è Logaritmo di 64.

Volendo però mettere i Logaritmi alla serie di tutti i numeri, bisognerà prenderli nella seguente maniera, composti di più numeri, avendo posti solamente li zeri all' unità, che in se moltiplicandosi rimane la stessa. Io quì porterò solamente i Logaritmi dall' 1 alli 200, benchè altri li apportano fino a 1000, altri a 10000, e Giovanni Prestet alli 20000; ed indi poscia si mostrerà, perchè in alcuni miei Logaritmi siasi variato l' ultimo numero.

LOGARITMI DE' NUMERI.

Numeri.	Logaritmi.		Numeri.	Logaritmi.	
1	0	0000000	15	1	1760913
2	0	3010300	16	1	2041200
3	0	4771213	17	1	2304480
4	0	6020600	18	1	2552726
5	0	6989700	19	1	2787536
6	0	7781513	20	1	3010300
7	0	8450980	21	1	3222193
8	0	9030900	22	1	3424227
9	0	9542426	23	1	3617278
10	1	0000000	24	1	3802113
11	1	0413927	25	1	3979400
12	1	0791813	26	1	4149734
13	1	1139434	27	1	4313639
14	1	1461280	28	1	4471580

Numeri.		Logaritmi.	Numeri.		Logaritmi.
29	1	4623980	61	1	7853298
30	1	4771213	62	1	7923917
31	1	4913617	63	1	7993406
32	1	5051500	64	1	8061800
33	1	5185140	65	1	8129134
34	1	5314789	66	1	8195440
35	1	5440680	67	1	8260748
36	1	5563026	68	1	8325089
37	1	5682017	69	1	8388491
38	1	5797836	70	1	8450980
39	1	5910647	71	1	8512583
40	1	6020600	72	1	8573326
41	1	6127839	73	1	8633229
42	1	6232493	74	1	8692317
43	1	6334685	75	1	8750613
44	1	6434527	76	1	8808136
45	1	6532126	77	1	8864907
46	1	6627578	78	1	8920947
47	1	6720979	79	1	8976271
48	1	6812413	80	1	9030900
49	1	6901960	81	1	9084852
50	1	6989700	82	1	9138139
51	1	7075702	83	1	9190781
52	1	7160034	84	1	9242793
53	1	7242759	85	1	9294189
54	1	7323939	86	1	9344985
55	1	7403627	87	1	9395193
56	1	7481880	88	1	9444827
57	1	7558749	89	1	9493900
58	1	7634280	90	1	9542426
59	1	7708520	91	1	9590414
60	1	7781513	92	1	9637878

Numeri.		Logaritmi.	Numeri.		Logaritmi.
93	1	9684830	125	2	0969100
94	1	9731279	126	2	1003706
95	1	9777236	127	2	1038037
96	1	9822713	128	2	1072100
97	1	9867717	129	2	1105898
98	1	9912260	130	2	1139434
99	1	9956353	131	2	1172913
100	2	0000000	132	2	1205740
101	2	0043214	133	2	1238516
102	2	0086002	134	2	1271048
103	2	0128372	135	2	1303339
104	2	0170334	136	2	1335389
105	2	0211893	137	2	1367206
106	2	0253059	138	2	1398791
107	2	0293838	139	2	1430148
108	2	0334239	140	2	1461280
109	2	0374265	141	2	1492192
110	2	0413927	142	2	1522883
111	2	0453230	143	2	1553360
112	2	0492180	144	2	1583626
113	2	0530784	145	2	1613680
114	2	0569049	146	2	1643529
115	2	0606978	147	2	1673173
116	2	0644580	148	2	1702617
117	2	0681860	149	2	1731863
118	2	0718820	150	2	1760913
119	2	0755469	151	2	1789769
120	2	0791813	152	2	1818436
121	2	0827854	153	2	1846915
122	2	0863598	154	2	1875207
123	2	0899052	155	2	1903317
124	2	0934217	156	2	1931347

Numeri.	*Logaritmi.*		*Numeri.*	*Logaritmi.*	
157	2	1958997	179	2	2528530
158	2	1986371	180	2	2552726
159	2	2013972	181	2	2576786
160	2	2041200	182	2	2600714
161	2	2068258	183	2	2624511
162	2	2095152	184	2	2648178
163	2	2121876	185	2	2671717
164	2	2148439	186	2	2695130
165	2	2174840	187	2	2718416
166	2	2201081	188	2	2741579
167	2	2227165	189	2	2764619
168	2	2253093	190	2	2787536
169	2	2278868	191	2	2810334
170	2	2304489	192	2	2833013
171	2	2329962	193	2	2855573
172	2	2355285	194	2	2878017
173	2	2380461	195	2	2900347
174	2	2405493	196	2	2922560
175	2	2430380	197	2	2944662
176	2	2455127	198	2	2966653
177	2	2479733	199	2	2988531
178	2	2504200	200	2	3010300
					&c.

Che queſti Logaritmi ſiano bene propoſti, può dimoſtrarſi, avvertendo come qualunque numero paragonandoſi al ſuo quadrato, il Logaritmo di queſto ne rieſca il doppio di quello; e paragonandoſi eſſo numero al ſuo cubo, il Logaritmo di queſto ſia il triplo di quello, e così negli altri ſuoi proporzionali rieſca il Logaritmo tante volte moltiplice di quello della radice quanto in eſſo cre-

ſca

ſca la proporzione. Per eſempio poſto il Logaritmo di 3, rieſce il doppio del medeſimo, per Logaritmo del di lui quadrato 9, e ne rieſce triplo il Logaritmo del ſuo cubo 27, e quadruplo il Logaritmo del biquadrato 81; e quintuplo il Logaritmo del ſurdeſolido 243 &c. Sicchè eſſendo Logaritmo di 3 il 0 4771213, ne rieſce del quadrato 9 queſt' altro Logaritmo 0 9542426, duplo di eſſo (benchè altri Matematici levano l' ultima unità dal Logaritmo di 9, ponendovi 0 9542425) e del quadrato di 2, che è 4, il Logaritmo è 0 6020600, duplo ſimilmente del Logaritmo di 2, che era 0 3010300; e del quadrato di 7, che è 49, il Logaritmo ſarà 1 6901960, che è il doppio di 0 8450980, Logaritmo di 7 (però altri Matematici aggiungono una unità di ſopra al Logaritmo di 49, mettendolo 1 6901961) Parimente del quadrato di 6, che è 36, il Logaritmo è 1 5563026, duplo appunto di 0 7781513, Logaritmo di 6 (benchè altri Matematici pongono a 36 il Logaritmo minore di una unità, cioè 1 5563025). Così pure il quadrato di 14 eſſendo 196, il ſuo Logaritmo è 2 2922560, che parimente è duplo di 1 1461280 Logaritmo di 14. E così in tutti gli altri.

Circa il cubo di 2 è 8, ed è il Logaritmo di 8 triplo di quello di 2, eſſendo quello 0 9030900; e queſto 0 3010300, la terza parte di eſſo; ſimilmente 1 4313639, Logaritmo di 27 cubo di 3, è quello pure triplo di 0 4771213, Logaritmo di 3 (al medeſimo però Logaritmo di 27, levano l' ultima unità alcuni Matematici

tici, mettendogli 1 4313638). Il cubo di 5 è pure 125, il cui Logaritmo 2 0969100, è parimente triplo del Logaritmo di 5, che era 0 6989700; e così sono tutti gli altri.

Oltre di ciò, qualunque numero compongasi con un altro moltiplicato in esso, il Logaritmo di tale numero prodottto da due altri, è composto da ambidue i Logaritmi di que' numeri due. Per esempio il numero 84, essendo composto da 2 moltiplicati in 42, ed ancora da 3 moltiplicato in 28, e da 4 moltiplicato in 21, e da 6 moltiplicato in 14, e da 7 moltiplicato in 12, sarà il Logaritmo di 84 composto sì da quelli di 2, e di 42, sì dagli altri di 3, e 28, e da 4, e da 21, e da 6, e da 14, e da 7, e da 12, come vedremo in questa maniera.

2	0 3010300
42	1 6232493
84	1 9242793

3	0 4771213
28	1 4471580
84	1 9242793

4	0 6020600
21	1 3222193
84	1 9242793

6	0 7781513
14	1 1461280
84	1 9242793

7	0 8450980
12	1 0791813
84	1 9242793

Parimente il 36 (oltre l' essere composto da 6 in 6 quadrato di esso) è pure moltiplicato da 2 in 18, da 3 in 12, e da 4 in 9, onde ne seguono li composti de' loro Logaritmi, che fanno uguale il Logaritmo di 36 in questa maniera.

2	0 3020300
18	1 2552726
36	1 5563026

3	0 4771213
12	1 0791813
36	1 5563026

4	0 6020600
9	0 9542426
36	1 5563026

E così potrà ritrovarsi negli altri numeri; onde ancora moltiplicando il 93 in 95, donde ne proverrà il numero assai maggiore 8835, si troverà il Logaritmo di questo composto dalli due Logaritmi di quelli altri, cioè da 1 9684830, che è di 93, ed 1 9777236, che è di 95, ne segue 3 9462066, per Logaritmo di 8835; e similmente si potranno ritrovare i Logaritmi di qualunque numero, proponendoli secondo i modi già dimostrati.

Ne' libri di Gasparo Scotto, e di Francesco Saverio Brunetti al Logaritmo di 80 pongono 1 9030899, ma da Claudio Francesco de Sciales, e da Giovanni Prestet ci si mette, come ancora io ci ho posto 1 9030900, essendo 80 moltiplicato da 8 in 10, e però i loro Logaritmi 0 9030900 dell' 8, ed 1 0000000 del 10 appunto fanno composti il nostro Logaritmo di 80. Tutti però levano similmente una unità dalli Logaritmi di 9, di 12 di 18 di 24 di 26, di 27, di 33 di 36, di 39, di 45, di 48, di 52, di 54, di 63, di 66, di 72, di 78, di 81, di 90, di 93, di 96, di 104, di 108, di 117, di 120, di 123, di 126, di 129, di 132, di 135, di 141, di 143, di 144, di 153 di 156, di 159, di 162, di 164, di 165, di 171, di 172, di 174, di 180, di 186 di 188, di 189, di 192, di 195, di 198 (anzi in quello di 81, ed in quello di 162 levano le due ultime unità, per esserne levato uno al 9, di cui l' 81 è quadrato, ed il 162 è duplo di esso) però ne pongono una sola unità di più ne' Logaritmi di 49, di 98, di 119, di 161, di 186; ma siccome si è mostrato, essere

essere essi Logaritmi da me posti, ottimamente corrispondenti a i Logaritmi degli altri numeri, che moltiplicandosi insieme fanno quel maggior numero, che ha quel Logaritmo, di cui si cerca; può altresì in altri numeri cercarne i loro Logaritmi, riguardando da quali altri Logaritmi de' numeri componenti esso numero, possa il Logaritmo determinarsi al medesimo numero.

APPENDICE.

MOlte altre aritmetiche osservazioni si potrebbero quì aggiungere, ma dipendendo dalle dimostrazioni geometriche, ed algebratiche da esporsi in altri luoghi, non occorre in questo luogo parlarne. Solamente aggiungerò quì altre proprietà appartenenti a' cubi, a' quadrati, ed alle loro radici.

A		*B*		*C*
1	———	1	———	1
2	———	3	———	4
3	———	6	———	9
4	———	10	———	16
5	———	15	———	25
6	———	21	———	36
7	———	28	———	49
8	———	36	———	64
9	———	45	———	81
10	———	55	———	100
11	———	66	———	121
12	———	78	———	144
&c.		&c.		&c.

Primieramente si osservi, che posta la serie *A* de' numeri dall' unità crescenti, cioè 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.; e posta l' altra serie *B*, che è la somma di tutti gli antecedenti, cioè 1 uguale ad 1, poscia 1, e 2 uguale a 3, indi 1, 2, e 3 uguale a 6, ed aggiunto a questo il 4 fa il 10, al quale unito il 5 fa il 15, e messovi il 6 fa 21, &c. Poscia nell' altra serie *C*, si fa la somma di due numeri dell' antecedente serie *B*, e ne riescono i quadrati de' numeri della serie *A*, rimanendo primieramente 1, indi 1 e 3 uguale a 4 quadrato di 2, poscia 3 e 6 uguale a 9 quadrato di 3, di poi 6 e 10 uguale a 16 quadrato di 4, ne segue 10, e 15 uguale a 25 quadrato di 5, e finalmente 15 e 21 uguale a 36 quadrato di 6, e così tutti gli altri quadrati 49, 64, 81, &c. composti della sua radice, e di tutti gli altri numeri precedenti.

Se-

A	*B*	*D*	*E*
1	1	1	1
2	3	9	8
3	6	36	27
4	10	100	64
5	15	225	125
6	21	441	216
7	28	784	343
8	36	1296	512
9	45	2025	729
10	55	3025	1000
11	66	4356	1331
12	78	6084	1728
&c.	&c.	&c.	&c.

Secondariamente alle due ſerie *A*, e *B*, aggiunta una ſerie *D*, in cui ſono i quadrati di quelle ſomme *B* delle radici, cioè l' 1 di 1 il 9 di 3, il 36 di 6, il 100 di 10, il 225 di 15 &c. Ma nell' altra ſerie *E*, ſono i cubi 1, 8, 27, 64 &c. corriſpondenti alle radici 1, 2, 3, 4 &c. della ſerie *A*, i quali cubi ſono cavati dalla ſerie *D*, levando ogni quadrato dal ſuo precedente, eſſendo 9 manco 1 uguale ad 8, e il 36 manco 9 uguale al 27, ed il 100 manco 36 uguale al 64, ed il 225 manco il 100 uguale a 125 &c.

Anzi può in terzo luogo oſſervarſi, che i medeſimi quadrati delle ſomme delle radici, quali ſono nella ſerie *D*, ſono eſſi pure la ſomma de' cubi di quelle radici, che compongono la loro radice quadra; cioè il 9 quadrato di 3, è uguale ad 1 ed 8, che ſono i cubi di 1 e di 2; ed il

quadrato 36 la cui radice è 6, è uguale ad 1, 8, e 27, che sono i cubi di 1, di 2, e di 3; similmente il quadrato 100 la cui radice è 10, è uguale ad 1, 8, 27, è 64 che sono i cubi di 1, 2, 3, e 4; ed ancora il seguente quadrato 225 la cui radice 15, rimane composto de' cubi 1, 8, 27, 64, e 125, le cui radici sono 1, 2, 3, 4, e 5, che fanno la somma di 15; e così ancora riesce in ciascun altro.

F.	*G.*	*H.*	*I.*
2	2	4	8
4	6	36	72
6	12	144	288
8	20	400	800
10	30	900	1800
12	42	1764	3528
&c.	&c.	&c.	&c.

La quarta osservazione può essere nelle serie *F*, *G*, *H*, *I*. Nella prima sono i numeri crescenti di 2, cioè 2, 4, 6, 8 &c; nella seconda *G.* vi è la somma di essi 2, 6, 12, 20 &c; e nella terza *H.* vi sono i quadrati di tali somme 4, 36, 144, 400 &c; e nell' ultima serie *I.* vi è il doppio di ciascuno di quei precedenti quadrati, cioè 8, 72, 288, 800 &c. quali bisogna osservare, che ciascheduno è la somma de' cubi di quei numeri della serie *F*, cioè 8 è il cubo di 2, ed il 72 è uguale ad 8 e 64, che sono i cubi di 2 e di 4; similmente il 288 è uguale a numeri 8, 64, e 216, che sono i cubi di 2, di 4, e di 6; parimente l' 800 uguaglia 8, 64, 216, 512, che sono i cubi di 2, di 4, e di 6, e di 8, e così gli altri.

K	L	M	N
3	3	9	27
6	9	81	243
9	18	324	972
12	30	900	2700
15	45	2025	6075
18	63	3969	11907
&c.	&c.	&c.	&c.

La quinta osservazione sia nell' altre serie *K*, *L*, *M*, *N*, la prima delle quali ha i numeri di ternario crescenti 3, 6, 9, 12 &c; la seconda *L* ha la somma di essi 3, 9, 18, 30, &c; la terza *M* contiene i quadrati di esse somme 9, 81, 324, 900 &c; l' ultima *N* triplica gli antecedenti quadrati, che riescono 27, 243, 972 &c; e sono questi parimente la somma de' cubi de' numeri della serie *K*, essendo 27 il cubo di 3, ed il 243 uguale a 27 e 216, che sono i cubi di 3 e di 6; ed ancora il 972 uguale a 27, 216, e 729 che sono i cubi di 3, di 6, e di 9, e così gli altri.

Similmente se si prendessero i numeri crescenti di 4, e poi le somme di essi, indi i quadrati di queste, poscia il quadruplo di ciascuno di essi quadrati, saranno pur questi la somma de' cubi di quei numeri primieramente descritti; e parimente in altre serie di numeri di qualunque distanza aritmeticamente disposti, ne seguirà simillissima serie de' numeri composti de' cubi di quelle proposte radici.

Alla fine può avvertirsi, che i numeri se finissero in 2, in 3, in 7, e in 8, non potranno mai

essere

eſsere quadrati, perchè ciaſcun quadrato finiſce o in 1, o in 4, o in 6, o in 9, o nel zero, o ancora nel 5, ma ſempre avendoci avanti il 2, che ſe avanti al 5 ha qualunque altra nota in vece del 2, non potrà eſsere quadrato. Oltre a ciò, ſe il numero aveſse l' eccesſo di 9 uguale a 2, a 3, a 5, a 6, a 8, non potrà eſsere quadrato, potendo i quadrati, o non avere alcuno eccesſo al 9, o ſolamente l'uno, o il 4, o il 7, e non altro eccesſo.

I cubi poi non mancano di avere qualunque nota eſtrema, potendo finire in qualſivoglia numero, ma però o non hanno eccesſo al 9, o ſolamente l' eccedono dell' uno, o dell' 8; ſicchè avendo qualunque numero per eccesſo di 9, il 2, o il 3, o il 4, o il 5, o il 6, o il 7, non potrà eſsere cubo; il che può vederſi nelle tavole ſopra addotte circa i quadrati, e i cubi de' numeri interi. E perciò ci baſti.

IL FINE.